Matematika szigorlat G (A3) – 2022. június 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.

   Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. Írja fel a sík x tengelyre tükrözésének mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a sajátértékek ± 1.

6. Írja fel az $f(x,y)$ kétváltozós függvény (x_0,y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.

   Megoldás.

$$\begin{aligned} &f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2}f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}f''_{yy}(y-y_0)^2 \end{aligned}$$

7. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$.

8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja U, és $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a))$.

9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

   Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$.

10. Írja fel a másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenletek általános alakját.

    Megoldás. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = [0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 0.$$

   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x+1) - 2\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

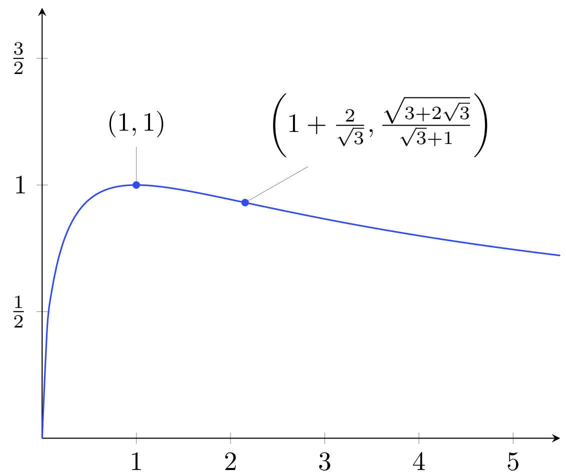
$$f''(x) = \frac{(-\frac{1}{2}x^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2})(x+1)^2 - (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-3/2}\frac{3x^2 - 6x - 1}{(x+1)^3}.$$

   Az első derivált zérushelye $x = 1$, a második derivált zérushelye $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Az előjelek:

	$(0,1)$	1	$(1, 1+\frac{2}{\sqrt{3}})$	$1+\frac{2}{\sqrt{3}}$	$(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$
f		max		infl	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy $+\infty$ irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = [0, 1]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} \, \mathrm{d}x$$

   Megoldás. $t = e^x$, $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 + t^2}{1 + t} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{1 - t}{t(1+t)}\right) \mathrm{d}t,$$

   majd a hányadost parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1 - t}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}.$$

   Meg mindkét oldalt megszorozva a közös nevezővel

$$1 - t = A(t+1) + Bt = (A+B)t + A$$

   adódik, ami akkor igaz minden t esetén, ha $A = 1$ és $A + B = -1$, azaz $B = -2$. Az integrál

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} \, \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{t} - 2\frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = t + \ln|t| - 2\ln|t+1| = e^x + x - 2\ln(e^x + 1) + C.$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}(x+1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a konvergenciasugár

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \ln n}} \right)^{-1} = 1.$$

A hatványsor középpontja $x_0 = -1$, tehát a konvergenciaintervallum végpontjai -2 és 0, ezeket külön kell megvizsgálni. Az $x = -2$ pontban a sor

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}(-2+1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n},$$

ami Leibniz típusú (váltakozó előjel, tagok abszolútértéke monoton csökkenve nullához tart), tehát konvergens.
Az $x = 0$ pontban adódó $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ sor vizsgálatához használhatjuk az integrálkritériumot. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ monoton csökken ha $x > 1$,

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} \int_2^{\omega} \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty} [\ln \ln x]_2^{\omega} = \infty,$$

tehát a sor is divergens. A konvergenciatartomány tehát $[-2, 0)$.

4. Határozza meg az $f(x) = |\sin(x/2)|$ függvény Fourier-sorát.

Megoldás. A függvény páros, tehát a Fourier-sorban nincsenek szinuszos tagok:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

ahol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-2 \cos \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \cos nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{x}{2} + nx\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - nx\right) \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)}{1+2n} - \frac{\cos\left(\frac{x}{2} - nx\right)}{1-2n} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n} \right) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4n^2}. \end{aligned}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = e^{-z} x \mathbf{i} + e^{-z} y \mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\vartheta \mathbf{k}$, a $z \geq$ darabnak megfelelő paramétertartomány $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$, a normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\mathrm{d}\vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi} = \sin\vartheta \mathbf{r}(\vartheta, \varphi).$$

A vektormező a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta, \varphi)) = e^{-\cos\vartheta} \sin\vartheta \cos\varphi \mathbf{i} + e^{-\cos\vartheta} \sin\vartheta \sin\varphi \mathbf{j},$$

az integrál ($t = -\cos\vartheta$, $\mathrm{d}t = \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$ helyettesítéssel, majd kétszer parciális integrálással számolva)

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\mathrm{d}\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left(e^{-\cos\vartheta}\sin^3\vartheta\cos^2\varphi + e^{-\cos\vartheta}\sin^3\vartheta\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2} e^{-\cos\vartheta}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi\int_{-1}^{0} e^t(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi\left(\left[e^t(1-t^2)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^t(-2t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\pi\left(\left[e^t(1-t^2+2t)\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^t(-2)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\pi\left[e^t(1-t^2+2t-2)\right]_{-1}^{0} = 2\pi(-1+4e^{-1}).
\end{aligned}$$

6. Oldja meg a $2x(1+y)+(x^2+1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

   tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^x 2\xi\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2+1)\,\mathrm{d}\eta \\
&= x^2 + (x^2+1)y.
\end{aligned}$$

   Az általános megoldás $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(0,y(0)) = u(0,2) = 2$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát

$$y(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1}.$$

7. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény Laplace-transzformáltját.

   Megoldás. Jelölje F a Laplace-transzformáltat ($z > 0$ esetén létezik $F(z)$, mivel f korlátos és folytonos). Az $x \mapsto xf(x) = \sin x$ függvény Laplace-transzformáltja egyrészt $-F'(z)$, másrészt (táblázatból) $\frac{1}{1+z^2}$. Tehát

$$-F'(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

   amiből

$$F(z) = -\arctan z + C.$$

   A konstans meghatározásához használjuk, hogy $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$, ebből $C = \frac{\pi}{2}$ adódik, azaz

$$F(z) = \frac{\pi}{2} - \arctan z.$$