

Matematika szigorlat G (A3) – 2022. június 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mit nevezünk abszolút konvergens numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
5. Írja fel a sík x tengelyre tükrözésének mátrixát a szokásos \mathbf{i}, \mathbf{j} bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.
6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Mondja ki a Stokes-tételt.
8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.
10. Írja fel a másodrendű, közönséges, lineáris, homogén differenciálegyenletek általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} dx$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} (x+1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg az $f(x) = |\sin(x/2)|$ függvény Fourier-sorát.
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = e^{-z}x\mathbf{i} + e^{-z}y\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg a $2x(1+y) + (x^2+1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény Laplace-transzformáltját.