Matematika szigorlat G (A3) – 2022. szeptember 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja fel az $\frac{1}{a+bi}$ komplex számot algebrai alakban, ha $a, b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ módon jelölt fogalmat.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke $-\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq K$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.

   Megoldás. Az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens, ha $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és divergens, ha $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_x(x-x_0) - A_y(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?

   Megoldás. $\displaystyle\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = [0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-x/2} = 0.$$

   A deriváltak

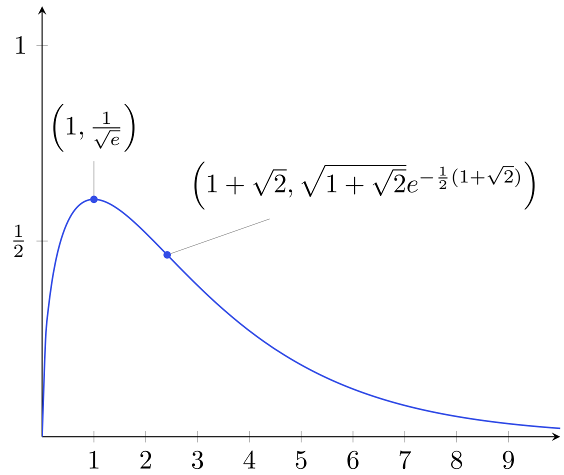
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x/2} - \frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-x/2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}e^{-x/2}$$

$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{x} - (1-x)\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}e^{-x/2} - \frac{1-x}{4\sqrt{x}}e^{-x/2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{4x^{3/2}}e^{-x/2}.$$

   Az első derivált zérushelye $x = 1$, a második derivált zérushelye $x = 1 + \sqrt{2}$. Az előjelek:

	$(0,1)$	1	$(1, 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2}, \infty)$
f		max		infl	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy $+\infty$ irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = [0, 1/\sqrt{e}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \sqrt{x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. A négyzetgyök alatti kifejezést teljes négyzetté alakítjuk. $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, tehát $\cosh t = x + 1$, $\sinh t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ helyettesítést érdemes alkalmazni:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\cosh^2 t - 1}\sinh t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1 - \cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{2} - \frac{\sinh 2t}{4} \\
&= \frac{\operatorname{arcosh} x}{2} - \frac{\sinh 2\operatorname{arcosh} x}{4} + C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. Az együtthatók sorozata $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, a konvergenciasugarat a Cauchy–Hadamard-tétel segítségével határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}\,\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,
\end{aligned}$$

mivel $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, így az első tényezőben a gyök alatt egyhez tartozó sorozat áll, és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Az $x = -1$ pontban a sor Leibniz-típusú, mert sin monoton nő a $[0, 1]$ intervallumon, a 0 pontban folytonos és 0 az értéke, $\frac{1}{n}$ monoton csökkenően nullához tart, az előjle a $(-1)^n$ tényező miatt váltakozik.
Az $x = 1$ pontban

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

miatt az összehasonlító kritérium (minoránskritérium) alapján divergens, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.
A konvergenciatartomány tehát $[-1, 1)$.

4. Határozza meg az OAO^{-1} mátrixot és annak sajátértékeit (a sajátvektorokat nem szükséges megkeresni).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az O mátrix ortogonális, emiatt $O^{-1} = O^T$. Ennek felhasználásával

$$\begin{aligned}
OAO^{-1} &= OAO^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Mivel a kapott mátrix A konjugáltja, a sajátértékei megegyeznek A sajátértékeivel. A felső háromszög mátrix, tehát a sajátértékek a főátló elemei, azaz $2, -3, 0, 1$.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ egyenletrendszerű görbe mentén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. A megadott görbe körvonal, a szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $(t \in [0, 2\pi])$, a derivált $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$. A vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = \sin t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j} + \cos t \sin t\mathbf{k}.$$

A görbementi integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j} + \cos t \sin t\mathbf{k}) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - 2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -3\pi.
\end{aligned}$$

6. Határozza meg a $2x^3 - x + 6xy^2 + (6x^2y - y + 2y^3)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y},$$

   tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_0^x (2\xi^3 - \xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (6x^2\eta - \eta + 2\eta^3)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \left[\frac{\xi^4}{2} - \frac{\xi^2}{2}\right]_{\xi=0}^x + \left[3x^2\eta^2 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{2}\right]_{\eta=0}^y \\ &= \frac{x^4 - x^2 + 6x^2y^2 - y^2 + y^4}{2}. \end{aligned}$$

   Az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$, ebből $y(x)$ explicit alakban is kifejezhető:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{-6x^2 + 1 \pm \sqrt{32x^4 - 8x^2 + 8C + 1}}{2}},$$

   ahol az előjelek minden kombinációja lehetséges.

7. Oldja meg az $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$, tehát a gyökök -2 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Be^{-x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cxe^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ce^{-x} - Cxe^{-x} = C(1-x)e^{-x} \\ y''(x) &= C(-1)e^{-x} - C(1-x)e^{-x} = C(x-2)e^{-x}, \end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve

$$C(x - 2 + 3(1-x) + 2x)e^{-x} = e^{-x}$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C = 1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = xe^{-x} + Ae^{-2x} + Be^{-x}$. A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = 1 - 2A - B, \end{aligned}$$

   az egyenletrendszer megoldása $A = 1$, $B = -1$. A keresett megoldás tehát $y(x) = xe^{-x} + e^{-2x} - e^{-x}$.