Matematika szigorlat G (A3) – 2022. szeptember 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja fel az $\frac{1}{a+bi}$ komplex számot algebrai alakban, ha $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ módon jelölt fogalmat.
3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.
4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \sqrt{x}e^{-x/2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \sqrt{x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg az OAO^{-1} mátrixot és annak sajátértékeit (a sajátvektorokat nem szükséges megkeresni).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ egyenletrendszerű görbe mentén a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárás szerint.
6. Határozza meg a $2x^3 - x + 6xy^2 + (6x^2y - y + 2y^3)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Oldja meg az $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.