Matematika szigorlat G (A3) – 2022. december 20.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ módon jelölt fogalmat.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke ∞, ha $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$.

3. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható) f függvény $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját.

   Megoldás. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $\displaystyle a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$

5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{R}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

8. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = -3$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -1.$$

   A deriváltak

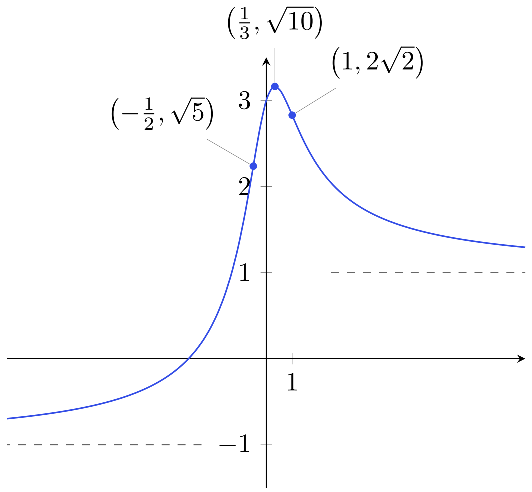
$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (x+3)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1-3x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{-3(1+x^2)^{3/2} - (1-3x)\cdot 3x\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^3} = \frac{3(2x^2-x-1)}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

   Az első derivált zérushelye $x = \frac{1}{3}$, a második derivált zérushelyei $x = -\frac{1}{2}$ és $x = 1$. Az előjelek:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
f		infl		max		infl	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

   Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = (-1, \sqrt{10}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ integrált.

   Megoldás. A négyzetgyök alatt másodfokú polinom áll, teljes négyzetté alakítjuk: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, tehát $x+1 = \sinh t$, $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést alkalmazunk. Ekkor $(x+1)^2+1 = \cosh^2 t$, tehát

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int (\sinh t - 1)\cosh^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\sinh t \cosh^2 t - \frac{1+\cosh 2t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cosh^3 t}{3} - \frac{t}{2} - \frac{\sinh 2t}{4} \\
&= \frac{\cosh^3 \operatorname{arsinh}(x+1)}{3} - \frac{\operatorname{arsinh}(x+1)}{2} - \frac{\sinh 2\operatorname{arsinh}(x+1)}{4} + C.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ sor összegét.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^2} &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}\\ &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}nx^n,\end{aligned}$$

ha $|x|<1$. A keresett numerikus sor $x=\frac{1}{2}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

4. Adja meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen, és oldja meg az egyenletrendszert ezen paraméterérték mellett.

$$\begin{aligned}x_1+x_2+3x_3&=a\\ -2x_2-3x_3&=-1\\ 3x_1-3x_2-x_3&=0\\ -x_1+3x_2-x_3&=1\end{aligned}$$

Megoldás. A kibővített mátrixot hozzuk sorműveletekkel lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\0&-2&-3&-1\\3&-3&-1&0\\-1&3&-1&1\end{array}\right]\overset{s_1\leftrightarrow s_4}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&3&-1&1\\0&-2&-3&-1\\3&-3&-1&0\\1&1&3&a\end{array}\right]\overset{\substack{s_3+3s_1\\ s_4+s_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&3&-1&1\\0&-2&-3&-1\\0&6&-4&3\\0&4&2&a+1\end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_3+3s_2\\ s_4+2s_2}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&3&-1&1\\0&-2&-3&-1\\0&0&-13&0\\0&0&-4&a-1\end{array}\right]\overset{s_4-\frac{4}{13}s_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}-1&3&-1&1\\0&-2&-3&-1\\0&0&-13&0\\0&0&0&a-1\end{array}\right]$$

Ebben az alakban leolvashatjuk, hogy az együtthatómátrix rangja 3, míg a kibővített mátrix rangja 3 ha $a=1$, egyébként 4, tehát $a=1$ esetén létezik megoldás. Mivel a rang megegyezik az ismeretlenek számával, a megoldás egyértelmű. $a=1$ esetén a megoldást az utolsó egyenlettől visszafelé haladva számolhatjuk: $x_3=0$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_1=\frac{1}{2}$.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t)=\ln^2 t\mathbf{i}+\ln\ln t\mathbf{j}+2\ln t\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t\in[e,e^2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

Megoldás. A derivált hossza

$$\begin{aligned}|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= \left|\frac{2\ln t}{t}\mathbf{i}+\frac{1}{t\ln t}\mathbf{j}+\frac{2}{t}\mathbf{k}\right|\\ &= \sqrt{\left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t\ln t}\right)^2+\left(\frac{2}{t}\right)^2}\\ &= \left|\frac{1+2\ln^2 t}{t\ln t}\right|.\end{aligned}$$

$t>1$ esetén az abszolútérték elhagyható, az ívhossz

$$\int_e^{e^2}\frac{1+2\ln^2 t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t=\left[\ln\ln t+\ln^2 t\right]_e^{e^2}=3+\ln 2.$$

6. Oldja meg a

$$\cos(x)+\left(\frac{2}{3}+\frac{y}{3\sqrt{3+y^2}}\right)y'=0$$

differenciálegyenletet $y(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{y}{3\sqrt{3+y^2}}\right)y' = -\cos(x).$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int_0^x \left(\frac{2}{3}+\frac{y(\xi)}{3\sqrt{3+y(\xi)^2}}\right)y'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x (-\cos\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

azaz

$$\frac{2}{3}y(x)-\frac{2}{3}y(0)+\frac{1}{3}\sqrt{3+y(\xi)^2}-\frac{1}{3}\sqrt{3+y(0)^2} = -\sin(x).$$

A kezdetiérték-probléma megoldása implicit alakban

$$\frac{2}{3}y(x)+\frac{1}{3}\sqrt{3+y(\xi)^2}-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\sin(x).$$

7. Oldja meg a $y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$ differenciálegyenletet $y(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó $y'+y=0$ homogén egyenletet oldjuk meg. Mivel ez állandó együtthatós, az általános megoldást a karakterisztikus polinom segítségével kereshetjük meg. A karakterisztikus polinom $\lambda+1$, tehát Ae^{-x} a homogén egyenlet általános megoldása. Az inhomogén egyenletet az állandó variálásának módszerével oldjuk meg. A megoldást $c(x)e^{-x}$ alakban keressük:

$$c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}+c(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x},$$

amiből $c'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ adódik. A primitív függvényt $t=e^x$, $\mathrm{d}t=e^x\,\mathrm{d}x$ helyettesítéssel határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln|1+t| = \ln(1+e^x)+C. \end{aligned}$$

Az egyenlet általános megoldása tehát $y(x)=\ln(1+e^x)e^{-x}+Ce^{-x}$, a kezdeti feltétel alapján $0=y(0)=\ln 2+C$, amiből $C=-\ln 2$ adódik, így

$$y(x)=\ln(1+e^x)e^{-x}-\ln(2)e^{-x}=e^{-x}\ln\frac{1+e^x}{2}.$$