

**Matematika szigorlat G (A3) – 2022. december 20.**

Elmélet ( $10 \times 3 = 30$  pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  módon jelölt fogalmat.
3. Írja fel az (elegendően sokszor differenciálható)  $f$  függvény  $x_0 \in \mathcal{D}_f$  pont körüli  $n$ -edik Taylor-polinomját.
4. Hogyan írható fel egy  $T$  szerint periodikus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az  $f(x, y)$  kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az  $(x_0, y_0)$  pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Mondja ki a Stokes-tételt.
8. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ( $7 \times 10 = 70$  pont)

1. Végezze el az  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1+x^2}}$  függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az  $\int x\sqrt{x^2+2x+2} dx$  integrált.
3. Határozza meg a  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  sor összegét.
4. Adja meg az  $a$  valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása legyen, és oldja meg az egyenletrendszert ezen paraméterérték mellett.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 &= a \\ -2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1\end{aligned}$$

5. Számítsa ki az  $\mathbf{r}(t) = \ln^2 t \mathbf{i} + \ln \ln t \mathbf{j} + 2 \ln t \mathbf{k}$  egyenletű görbe  $t \in [e, e^2]$  paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Oldja meg a

$$\cos(x) + \left( \frac{2}{3} + \frac{y}{3\sqrt{3+y^2}} \right) y' = 0$$

differenciálegyenletet  $y(0) = 0$  kezdeti feltétel mellett.

7. Oldja meg a  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$  differenciálegyenletet  $y(0) = 0$  kezdeti feltétel mellett.