Matematika szigorlat G (A3) – 2023. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban a $-1+i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

2. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?

   Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a.

3. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

4. Írja fel a sík $x = y$ egyenesre vonatkozó tükrözésének mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a sajátértékek ± 1.

5. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.

   Megoldás. Az $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-probléma megoldásának szukcesszív approximációja alatt a $\varphi_0(x) = y_0$,

   $$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi)) \, \mathrm{d}\xi$$

   rekurzióval definiált függvénysorozatot értjük.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = (0, \infty) \setminus \{1\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushely.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\ln^2 x} = 0$$
$$\lim_{x\to 1-} \frac{x}{\ln^2 x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x}{\ln^2 x} = \infty$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln^2 x} = \infty.$$

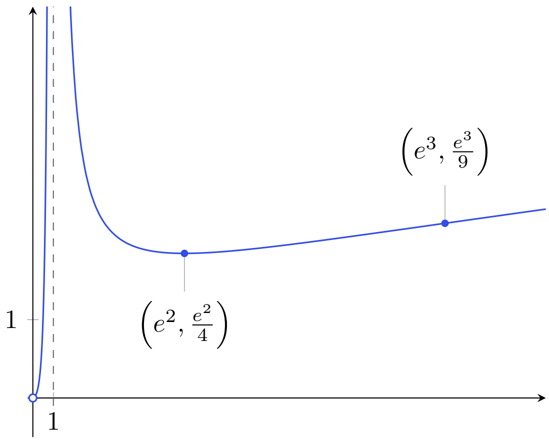
   A deriváltak

$$f'(x) = \frac{\ln^2 x - x\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}$$
$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^3 x - (\ln x - 2)\frac{3\ln^2 x}{x}}{\ln^6 x} = \frac{6 - 2\ln x}{x \ln^4 x}.$$

   Az első derivált zérushelye $x = e^2$, a második derivált zérushelye $x = e^3$. Az előjelek:

	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	(e^2,e^3)	e^3	(e^3,∞)
f	$\nearrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl	$\nearrow$
f'	$+$	X	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	X	$+$	$+$	$+$	0	$-$

   Láttuk, hogy mindkét irányban vízszintes aszimptota van. $R_f = (0, \infty)$, grafikon:



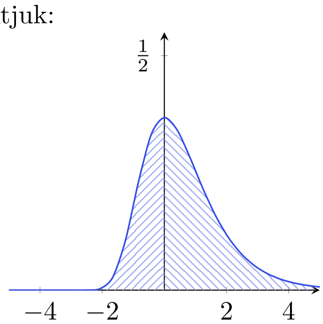
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-e^{-x}} \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Alkalmazzunk $t = e^{-x}$, $\mathrm{d}t = -e^{-x}\,\mathrm{d}x$ helyettesítést:

$$\int e^{-x-e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \int (-e^{-t})\,\mathrm{d}t$$
$$= e^{-t} = e^{-e^{-x}} + C.$$

   Az improprius integrál kiszámításához az integrálási tartományt két részre bontjuk:



$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x-e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{-e^{-x}}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{e} - e^{-e^{-a}}\right) = \frac{1}{e}$$

   és

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x-e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[e^{-e^{-x}}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(e^{-e^{-b}} - \frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}.$$

   Mivel mindkét integrál véges, a kiszámítandó integrál is létezik, és a két érték összege, azaz 1.

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+7}{n^3-4n+1} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. A Cauchy–Hadamard-tétel szerint a konvergenciasugárra

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+7}{n^3-4n+1}} = 1$$

teljesül, tehát $R = 1$. A végpontokban a tagok abszolútértékét felülről becsülhetjük ($n \geq 3$):

$$\left| \pm \frac{n+7}{n^3-4n+1} \right| = \frac{n+7}{n^3-4n+1} \leq \frac{4n}{n(n^2-4)+1} \leq \frac{4n}{n(\frac{n^2}{2})} = \frac{8}{n^2}.$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, a majoránskritérium alapján a sor a végpontokban is (abszolút) konvergens. A konvergenciatartomány tehát $[-1, 1]$.

4. Határozza meg azon 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorát, amelyre $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = x(\pi - |x|)$ teljesül.

Megoldás. A függvény páratlan, emiatt a Fourier-sora tisza szinusz sor: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, ahol

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \qquad .$$

Az integrált parciális integrálással számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \left[(\pi x - x^2) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[(\pi x - x^2) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \left(\left[(\pi - 2x) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-2) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \left[(\pi x - x^2) \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \left(\left[(\pi - 2x) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi} - \left[-2 \frac{\cos nx}{n^3} \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \left[\left(-\frac{2}{n^3} - \frac{\pi x - x^2}{n} \right) \cos nx \right]_0^{\pi} = (1 - (-1)^n) \frac{2}{n^3}.
\end{aligned}$$

Ez 0 ha n páros, tehát $b_{2k} = 0$ és $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3}$, a Fourier-sor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin((2k+1)x).$$

5. Határozza meg az $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$, $|z| \leq 1$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott térrészt kitöltő m tömegű homogén test x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

Megoldás. Használjunk hengerkoordinátákat: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a paramétertartományt meghatározó egyenlőtlenség-rendszer $-1 \leq z \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}$, a Jacobi-determináns r. Legyen ρ a test sűrűsége, azaz m és a térfogat hányadosa, ekkor

$$\begin{aligned}
m &= \rho \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z = 2\pi\rho \int_{-1}^{1} \frac{1+z^2}{2} \, \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\rho \left[\frac{1}{2} z + \frac{1}{6} z^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} \pi \rho,
\end{aligned}$$

amiből $\rho = \frac{3m}{8\pi}$ adódik. A tehetetlenségi nyomaték $\rho(y^2 + z^2)$ integrálja:

$$\begin{aligned}
I_x &= \rho \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} (r^2 \sin^2 \phi + z^2) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \\
&= \pi\rho \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} (r^2 + 2z^2) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \frac{3m}{8} \int_{-1}^{1} \left[\frac{r^4}{4} + z^2 r^2 \right]_{r=0}^{\sqrt{1+z^2}} \mathrm{d}z \\
&= \frac{3m}{8} \int_{-1}^{1} \left(\frac{(1+z^2)^2}{4} + z^2(1+z^2) \right) \mathrm{d}z = \frac{3m}{32} \int_{-1}^{1} \left(5z^4 + 6z^2 + 1 \right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{3m}{32} \left[z^5 + 2z^3 + z \right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4} m.
\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $1+e^x\frac{1+y'}{\sqrt{1+(x+y)^2}}=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ alakú, ahol

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= 1+\frac{e^x}{\sqrt{1+(x+y)^2}}\\
Q(x,y) &= \frac{e^x}{\sqrt{1+(x+y)^2}},\\
\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} &= \frac{-e^x(1+(x+y)^2)^{-3/2}(x+y)-e^x(1+(x+y)^2)^{-1/2}+e^x(1+(x+y)^2)^{-3/2}(x+y)}{\frac{e^x}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}\\
&= -1
\end{aligned}$$

nem függ az y változótól, tehát létezik csak x-től függő multiplikátor:

$$\ln M(x)=\int\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}\,\mathrm{d}x=-x+C,$$

tehát $M(x)=e^{-x}$ multiplikátor. Az

$$e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}y'=0$$

egyenlet már egzakt, egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x\left(e^{-\xi}+\frac{1}{\sqrt{1+(\xi+0)^2}}\right)\mathrm{d}\xi+\int_0^y\frac{1}{\sqrt{1+(x+\eta)^2}}\,\mathrm{d}\eta\\
&= -e^{-x}+1+\operatorname{arsinh}x+\operatorname{arsinh}(x+y)-\operatorname{arsinh}x=-e^{-x}+1+\operatorname{arsinh}(x+y).
\end{aligned}$$

Az általános megoldás implicit alakban tehát $-e^{-x}+1+\operatorname{arsinh}(x+y(x))=C$.

7. Határozza meg az

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\in[0,1]\\ x-1 & \text{ha } x>1\end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(z) &= \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^b(x-1)e^{-zx}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left[(x-1)\frac{e^{-zx}}{-z}\right]_{x=1}^b-\int_1^b\frac{e^{-zx}}{-z}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[(x-1)\frac{e^{-zx}}{-z}-\frac{e^{-zx}}{z^2}\right]_{x=1}^b\\
&= \frac{e^{-z}}{z^2}
\end{aligned}$$

ha $\operatorname{Re}z>0$.