

Matematika szigorlat G (A3) – 2023. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban a $-1 + i$ számot.
2. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?
3. Mondja ki a Bolzano-tételt.
4. Írja fel a sík $x = y$ egyenesre vonatkozó tükrözésének mátrixát a szokásos \mathbf{i}, \mathbf{j} bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.
5. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Ismertesse a szukcesszív approximáció fogalmát.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-e^{-x}} dx$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+7}{n^3-4n+1} x^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg azon 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorát, amelyre $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = x(\pi - |x|)$ teljesül.
5. Határozza meg az $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$, $|z| \leq 1$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott térrészt kitöltő m tömegű homogén test x tengelyre vonatkozó tehetlenségi nyomatékát.
6. Határozza meg az $1 + e^x \frac{1+y'}{\sqrt{1+(x+y)^2}} = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.