Matematika szigorlat G (A3) – 2023. március 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha F folytonos az $[a,b]$ intervallumon, differenciálható (a,b)-n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0,1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall\epsilon\exists N_0 \in \mathbb{N}\forall x\forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Például $f_n(x) = x^n$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}$$

$$b_n = \left(\frac{2n-5}{3n+9}\right)^{2n+\sqrt{n}+3}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n+\sqrt{n}} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}}} + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-5}{3n+9}\right)^{2n+\sqrt{n}+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-\frac{5}{n}}{3+\frac{9}{n}}\right)^{2n+\sqrt{n}+3} = 0,
\end{aligned}$$

mivel az alap határértéke $\frac{2}{3} \in (0,1)$, a kitevő határértéke pedig ∞.

2. Végezze el az $f(x) = x^3 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = (0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushely az 1.

$$\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-3}} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \ln x = \infty.$$

A deriváltak

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(1 + 3\ln x)$$

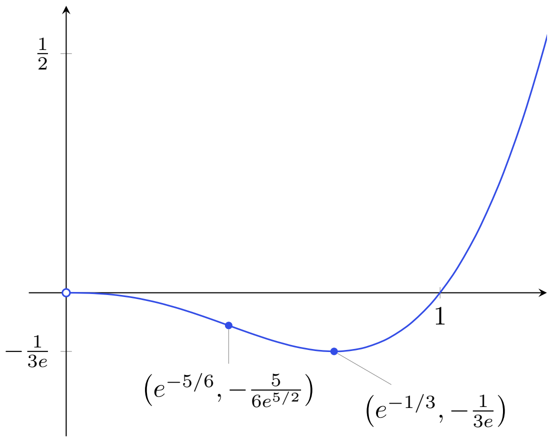
$$f''(x) = 2x(1+3\ln x) + x^2\frac{3}{x} = x(5 + 6\ln x),$$

f' zérushelye $e^{-1/3}$, f'' zérushelye $e^{-5/6}$. Az előjelek:

	$(0, e^{-5/6})$	$e^{-5/6}$	$(e^{-5/6}, e^{-1/3})$	$e^{-1/3}$	$(e^{-1/3}, \infty)$
f	$\frown$	infl	$\smile$	min	$\smile$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty,$$

tehát nem létezik ferde aszimptota. $R_f = [-\frac{1}{3e}, \infty)$, grafikon:



3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$ sor összegét.

   Megoldás.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2},$$

   ha $|x| < 1$, tehát

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2} \,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\arctan x}{x}. \end{aligned}$$

   A keresett numerikus sor $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1} = \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

   Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 8 & -2 & -\lambda-6 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda \\ &= -\lambda(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

   tehát a sajátértékek 0 és -1.
   A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 0 \cdot I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+4s_1 \\ s_3+8s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_3-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
   A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A-(-1)\cdot I = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & -5 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 8 & -2 & -5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+5s_1 \\ s_3+8s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_3-3s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
   Mivel csak két lineárisan független sajátvektort találhatunk, nem létezik sajátvektorokból álló bázis.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0,2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

   Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= |(\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 4t^2} \\ &= \sqrt{1+5t^2}. \end{aligned}$$

Az ívhosszt megadó integrált $t = \frac{1}{\sqrt{5}} \sinh u$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} \cosh u \, \mathrm{d}u$ helyettesítéssel számolhatjuk:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t &= \int_0^2 \sqrt{1+5t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \cosh^2 u \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^{\operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}} \frac{1+\cosh 2u}{2} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[u + \frac{\sinh 2u}{2} \right]_0^{\operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}} \\
&= \frac{\operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sinh 2 \operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{\operatorname{arsinh} 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + \sqrt{21}.
\end{aligned}$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű hengerpalást $|z| \leq 1$ darabján kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Legyen a hengerpalást paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = 2\cos u\mathbf{i} + 2\sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, a paramétertartomány $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2\sin u\mathbf{i} + 2\cos u\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = 2\cos u\mathbf{i} + 2\sin u\mathbf{j},$$

   ami kifelé mutat. A vektormező a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = 8\cos u \sin^2 u\mathbf{i} + 8\cos^2 u \sin u\mathbf{j} - 4v\cos u \sin u\mathbf{k}$$

   Az integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 32\cos^2 u \sin^2 u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= 16 \int_0^{2\pi} (2\cos u \sin u)^2 \, \mathrm{d}u \\
&= 16 \int_0^{2\pi} \sin^2 2u \, \mathrm{d}u \\
&= 8 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4u) \, \mathrm{d}u = 16\pi.
\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $y'' + 9y = 6\cos(3x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 9\lambda$, tehát a gyökök $\pm 3i$. A homogén egyenlet általános megoldása $A\cos(3x) + B\sin(3x)$.
   Az inhomogén tag polinomszor trigonometrikus, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cx\cos(3x) + Dx\sin(3x)$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= C\cos(3x) - 3Cx\sin(3x) + D\sin(3x) + 3Dx\cos(3x) \\
y''(x) &= -6C\sin(3x) - 9Cx\cos(3x) + 6D\cos(3x) - 9Dx\sin(3x),
\end{aligned}$$

   az egyenletbe behelyettesítve $-6C\sin(3x) + 6D\cos(3x) = 6\cos(3x)$ adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C = 0$ és $D = 1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned}
y(x) &= x\sin(3x) + A\cos(3x) + B\sin(3x) \\
y'(x) &= \sin(3x) + 3x\cos(3x) - A\sin(3x) + B\cos(3x),
\end{aligned}$$

   a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}
1 &= y(0) = A \\
0 &= y'(0) = B,
\end{aligned}$$

   így a keresett megoldás $y(x) = x\sin(3x) + \cos(3x)$.