

Matematika szigorlat G (A3) – 2023. március 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
3. Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0, 1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n}$$

$$b_n = \left(\frac{2n-5}{3n+9} \right)^{2n+\sqrt{n}+3}$$

2. Végezze el az $f(x) = x^3 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$ sor összegét.
4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis (\mathbb{C} felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0, 2]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xyz \mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű hengerpalást $|z| \leq 1$ darabján kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.
7. Oldja meg az $y'' + 9y = 6 \cos(3x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.