Matematika szigorlat G (A3) – 2023. június 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Írja fel egy közönséges, másodrendű, lineáris, homogén kezdetiérték-probléma általános alakját.

    Megoldás. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ahol $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények, $x_0, y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$ adott számok.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n\left(\sqrt{n^4 - n^2} - n^2\right)$$
$$b_n = n\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) - n\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4 - n^2} - n^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\frac{n^4 - n^2 - n^4}{\sqrt{n^4 - n^2} + n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1} = -\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) - n\ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n - \frac{1}{2}}\ln\left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)^{n - \frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushely.

$$\lim_{x\to -1\pm} x + \frac{1}{1+x} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} x + \frac{1}{1+x} = \pm\infty$$

A deriváltak

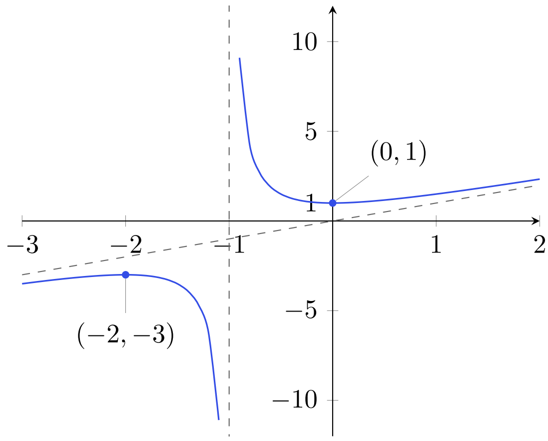
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

f' zérushelyei -2 és 0, f'' sehol nem nulla. Az előjelek:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f		max		X		min	
f'	$+$	0	$-$	X	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	X	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x(1+x)} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x} = 0,$$

tehát mindkét irányban létezik ferde aszimptota, egyenlete $y = x$. $R_f = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$, grafikon:



3. Határozza meg a sík x tengelyre való tükrözésének az $(\mathbf{i}+\mathbf{j}, -\mathbf{i}-2\mathbf{j})$ bázisra vonatkozó mátrixát, és adja meg a kapott mátrix sajátértékeit.

   Megoldás. Az $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ vektor tükörképe $\mathbf{i}-\mathbf{j}$, a $-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ vektoré pedig $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$. Mindkét kapott vektort kifejtjük a bázisban, azaz meghatározzuk azokat az $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ együtthatókat, amelyekkel

$$\alpha(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + \beta(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}) = \mathbf{i}-\mathbf{j}$$

   és

$$\gamma(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + \delta(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}) = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

   teljesül. Az első egyenletet $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ komponensekre bontjuk:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1 \\ \alpha - 2\beta &= -1, \end{aligned}$$

   ebből $\alpha = 3$ és $\beta = 2$. Hasonlóan kapjuk a másik vektoregyenletből, hogy $\gamma = -4$ és $\delta = -3$. A transzformáció mátrixa a megadott bázisban

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

   A kapott mátrix sajátértékei megegyeznek a lineáris transzformáció sajátértékeivel is: 1 és -1 ($\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ sajátvektorokkal).

4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.

   Megoldás. Cseréljük fel az integrálások sorrendjét. Felhasználjuk, hogy $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 1, y \le x \le 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\right\}$. Emiatt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \sqrt{1+\sinh^2 u}\cosh u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1+\cosh 2u}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{4}u + \frac{1}{8}\sinh 2u\right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} = \frac{\operatorname{arsinh} 1}{4} + \frac{\sinh 2\operatorname{arsinh} 1}{8}, \end{aligned}$$

   először $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, majd $t = \sinh u$, $\mathrm{d}t = \cosh u\,\mathrm{d}u$ helyettesítést alkalmazva.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + 2\sin t)\mathbf{i} + (-2\cos t + 2\sin t)\mathbf{j} + (2\cos t + \sin t)\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0, 2\pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

   Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned}|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= |(-\sin t + 2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t + 2\cos t)\mathbf{j} + (-2\sin t + \cos t)\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(-\sin t + 2\cos t)^2 + (2\sin t + 2\cos t)^2 + (-2\sin t + \cos t)^2} = 3,\end{aligned}$$

   tehát az ívhossz

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 3 \,\mathrm{d}t = 6\pi.$$

6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xy(x+y)\mathbf{k}$ vektormező integrálját a $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott alakzat peremén kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. Mivel a felület zárt és $\mathbf{u}$ mindenhol folytonosan differenciálható, alkalmazhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt. A vektormező divergenciája

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2.$$

   Jelölje V a megadott alakzatot, hengerkoordinátákkal paraméterezve $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r\cos\phi\,\mathbf{i} + r\sin\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartományt meghatározó egyenletek $0 \le r \le 2$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le z \le 4 - r^2$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi, z)) r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} 3r^3 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^2 (12r^3 - 3r^5) \,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[3r^4 - \frac{r^6}{2}\right]_0^2 = 32\pi.\end{aligned}$$

7. Oldja meg a

$$(1 + x^2)y' = x(1 + y^2)$$

   differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{x}{1 + x^2},$$

   integráljuk mindkét oldalt:

$$\int_0^x \frac{y'(\xi)}{1 + y(\xi)^2} \,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{\xi}{1 + \xi^2} \,\mathrm{d}\xi,$$

   azaz

$$\arctan y(x) - \arctan y(0) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}\ln(1 + 0).$$

   Ebből az egyenletből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = \tan \frac{1}{2}\ln(1 + x^2).$$