Matematika szigorlat G (A3) – 2023. június 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Írja fel egy közönséges, másodrendű, lineáris, homogén kezdetiérték-probléma általános alakját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.
$$a_n = n\left(\sqrt{n^4 - n^2} - n^2\right)$$
$$b_n = n \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) - n \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$
2. Végezze el az $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a sík x tengelyre való tükrözésének az $(\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ bázisra vonatkozó mátrixát, és adja meg a kapott mátrix sajátértékeit.
4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1 + x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + 2\sin t)\mathbf{i} + (-2\cos t + 2\sin t)\mathbf{j} + (2\cos t + \sin t)\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0, 2\pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Számítsa ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xy(x + y)\mathbf{k}$ vektormező integrálját a $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$ egyenlőtlenségek által meghatározott alakzat peremén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Oldja meg a
$$(1 + x^2)y' = x(1 + y^2)$$
differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.