Matematika szigorlat G (A3) – 2023. június 30.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

3. Mondja ki Rolle tételét.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b) intervallumon differenciálható, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = 0$.

4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

    Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \le L|x - x'|$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{2n^3 + 2^n + \sin(n^n)}{2^{n+3} - n^5 + 7}$$
$$b_n = \sqrt{n} - \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 2^n + \sin(n^n)}{2^{n+3} - n^5 + 7} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{2^n} + 1 + \frac{\sin(n^n)}{2^n}}{8 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{7}{2^n}} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - \frac{n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = 0.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

mindkét oldalt megszorozva a közös nevezővel

$$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

adódik, amiből $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$. Az integrál tehát

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = e^{2x}\cosh x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás.

$$f(x) = e^{2x}\cosh x = e^{2x}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{3x}}{2} + \frac{e^x}{2}.$$

Az exponenciális függvény $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Taylor-sorát felhasználva az f függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 1}{2n!} x^n.$$

Mivel mindkét tag Taylor-sora mindenhol konvergens, így az összeg, azaz f Taylor-sorának is végtelen a konvergenciasugara.

4. Hol vannnak és milyen típusúak az $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x) = (1-x^2)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\
f'_y(x,y) &= xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y) = x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},
\end{aligned}$$

a stacionárius pontok $(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$ és $(\pm 1, \mp 1)$.
A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \begin{bmatrix} xy(x^2-3) & (1-x^2)(1-y^2) \\ (1-x^2)(1-y^2) & xy(y^2-3) \end{bmatrix},$$

a pontokban behelyettesítve

$$\begin{aligned}
H(0,0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
H(1,1) = H(-1,-1) &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{bmatrix} \\
H(1,-1) = H(-1,1) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$\det H(0,0) = -1$, tehát itt nyeregpont van, $\det H(\pm 1, \pm 1) = \det H(\pm 1, \mp 1) = \frac{4}{e^2} > 0$, tehát ezekben a pontokban lokális szélsőérték van. A főátló elemeinek előjele alapján az $(1,1)$ és $(-1,-1)$ pontokban lokális maximum van, az $(1,-1)$ és $(-1,1)$ pontokban lokális minimum.

5. Határozza meg az $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = (1+\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i} + (1+\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}$ egyenletű felület $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának felszínét.

Megoldás. A normálvektor abszolútértéke

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| &= |(\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - \sin\vartheta\mathbf{k}) \times (-(1+\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{i} + (1+\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{j})| \\
&= |(1+\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + (1+\sin\vartheta)\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{i} + (1+\sin\vartheta)\cos\varphi| \\
&= 1+\sin\vartheta.
\end{aligned}$$

A felszín ennek integrálja a paramétertartományon:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi^2.$$

6. Oldja meg az $e^x y + (e^x + 3y^2)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú, ahol

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x P(\xi, 0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^y (e^x + 3\eta^2)\,\mathrm{d}\eta \\
&= \left[e^x\eta + \eta^3\right]_0^y \\
&= e^x y + y^3,
\end{aligned}$$

az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$. A kezdeti feltétel alapján $C = u(0, y(0)) = u(0,2) = 10$, tehát a kezdetiérték-probléma megoldása implicit alakban $e^x y(x) + y(x)^3 = 10$.

7. Határozza meg az $y'' + 2y' + 2y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, tehát a gyökök $-1 + \pm i$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$.

Az inhomogén tag polinomszor, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1 x$ alakban. A deriváltak

$$y'(x) = C_1$$
$$y''(x) = 0,$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_1 + 2(C_0 + C_1 x) = x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $2C_0 + 2C_1 = 0$ és $2C_1 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = -\frac{1}{2}$ és $C_1 = \frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{x-1}{2} + Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$.