

Matematika szigorlat G (A3) – 2023. június 30.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?
3. Mondja ki Rolle tételét.
4. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát is rá.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{2n^3 + 2^n + \sin(n^n)}{2^{n+3} - n^5 + 7}$$

$$b_n = \sqrt{n} - \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = e^{2x} \cosh x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Határozza meg az $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = (1 + \sin \vartheta) \cos \varphi \mathbf{i} + (1 + \sin \vartheta) \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}$ egyenletű felület $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának felszínét.
6. Oldja meg az $e^x y + (e^x + 3y^2)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 2y' + 2y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.