Matematika szigorlat G (A3) – 2023. július 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát szigorúan monoton növekvő korlátos számsorozatra.

   Megoldás. Valós számsorozatnak az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket nevezzük. Például $a_n = \arctan n$.

3. Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.

   Megoldás. Ha az f függvény invertálható, differenciálható az $f^{-1}(y_0)$ pontban és deriváltja ott nem 0, akkor f^{-1} differenciálható az y_0 pontban, és a deriváltja ott $\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?

   Megoldás. $a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,\mathrm{d}x$$

5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \to V$ lineáris transzformáció. A $\mathbf{v} \in V$ vektor az L lineáris transzformáció $\lambda \in K$ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.

   Megoldás. $f(x, y)$ differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha léteznek olyan A_x, A_y számok, amellyel

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_x(x - x_0) - A_y(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?

   Megoldás. $\displaystyle\iint_D \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = (0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 1$.

$$\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty$$

A deriváltak

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(1 + 2\ln x)$$

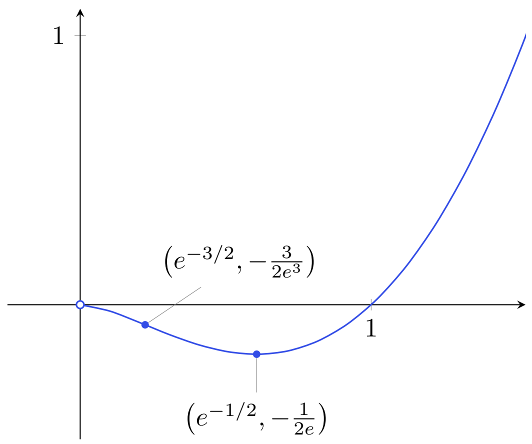
$$f''(x) = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} + 1 = 3 + 2\ln x,$$

f' zérushelye $e^{-1/2}$, f'' zérushelye $e^{-3/2}$. Az előjelek:

	$(0, e^{-3/2})$	$e^{-3/2}$	$(e^{-3/2}, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-1/2}, \infty)$
f		infl		min	
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x \ln x = \infty,$$

tehát nem létezik ferde aszimptota. $R_f = [-\frac{1}{2e}, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\pi x \sin x \, \mathrm{d}x$$

   Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x &= \big[x(-\cos x)\big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \big[x(-\cos x)\big]_0^\pi + \big[\sin x\big]_0^\pi \\ &= \pi - 0 + 0 - 0 = \pi.\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\left(n^5 + 7n^2 + \frac{2^{2n}}{n^3}\right)(x-2)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

   Megoldás. A konvergenciasugár meghatározásához a Cauchy–Hadamard-tételt használhatjuk:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n(n+1)/2}\left(n^5 + 7n^2 + \frac{2^{2n}}{n^3}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} 4\sqrt[n]{n^5 4^{-n} + 7n^2 4^{-n} + \frac{1}{n^3}} = 2,$$

tehát a konvergenciasugár $\frac{1}{4}$. A konvergenciaintervallum egyik végpontja $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$, ezt behelyettesítve a

$$\text{í}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\left(n^5+7n^2+\frac{2^{2n}}{n^3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+n(n+1)/2}\left(n^5 4^{-n}+7n^2 4^{-n}+\frac{1}{n^3}\right)$$

numerikus sort kapjuk, ami abszolút konvergens. Hasonlóan a $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ behelyettísével kapott

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\left(n^5 4^{-n}+7n^2 4^{-n}+\frac{1}{n^3}\right)$$

numerikus sor is abszolút konvergens, tehát a konvergenciatartomány $[\frac{7}{4},\frac{9}{4}]$.

4. Határozza meg az

$$\begin{aligned}-3x_1-x_2-3x_3&=0\\-2x_1+3x_2+ax_3&=0\\bx_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a, b valós paraméterek függvényében.

Megoldás. A paraméterek értékétől függetlenül homogén lineáris az egyenletrendszer, tehát a megoldásszám 1 vagy végtelen lehet attól függően, hogy az együtthatómátrix rangja megegyezik-e az ismeretlenek számával. Végezzünk Gauss-eliminációt az együtthatómátrixon:

$$\begin{bmatrix}-3&-1&-3\\-2&3&a\\0&b&2\end{bmatrix}\overset{s_1\cdot(-1)}{\underset{s_2\cdot 3}{\sim}}\begin{bmatrix}3&1&3\\-6&9&3a\\0&b&2\end{bmatrix}\overset{s_2+2s_1}{\sim}\begin{bmatrix}3&1&3\\0&11&3a+6\\0&b&2\end{bmatrix}\overset{s_3-\frac{b}{11}s_2}{\sim}\begin{bmatrix}3&1&3\\0&11&3a+6\\0&0&\frac{22-6b-3ab}{11}\end{bmatrix}$$

Ennek alapján a rang pontosan akkor 2, ha $b\neq 0$ és $a=-2+\frac{22}{3b}$, ilyenkor végtelen sok megoldás van, minden más esetben egy.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z)=y^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $A=(1,1,2)$ kezdőpontú és $B=(-1,1,0)$ végpontú szakasz mentén.

Megoldás. A szakasz paraméterezése $\mathbf{r}(t)=(1-2t)\mathbf{i}+\mathbf{j}+(2-2t)\mathbf{k}$ $(t\in[0,1])$, a derivált $\dot{\mathbf{r}}(t)=-2\mathbf{i}-2\mathbf{k}$, a vektormező a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t))=\mathbf{i}+(1-2t)^2\mathbf{j}+(2-2t)^2\mathbf{k}.$$

A vektormező integrálja

$$\begin{aligned}\int_\gamma \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\mathbf{i}+(1-2t)^2\mathbf{j}+(2-2t)^2\mathbf{k}\right)\cdot(-2\mathbf{i}-2\mathbf{k})\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(-2-2(2-2t)^2\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(-8t^2+16t-10\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{8}{3}+8-10=-\frac{14}{3}.\end{aligned}$$

6. Határozza meg a $\sqrt{1+x^2}y''+y'=0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet a $v=y'$ függvényre nézve elsőrendű és szétválasztható:

$$\frac{v'}{v}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

mindkét oldalt integráljuk

$$\int\frac{v'}{v}\,\mathrm{d}x=\int-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

azaz

$$\ln|v|=-\operatorname{arsinh}(x)+C.$$

Mindkét oldal exponenciálisát véve $v(x) = Ce^{-\operatorname{arsinh} x} = C(\sqrt{1+x^2}-x)$ adódik (C egy másik, de tetszőleges valós paraméter). Az eredeti egyenlet általános megoldását integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int (\sqrt{1+x^2} - x)\,\mathrm{d}x &= \int (\sqrt{1+x^2} - x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x^2}{2} \\
&= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2} \\
&= \int \frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2} \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\sinh 2t}{4} - \frac{x^2}{2} + C \\
&= \frac{\operatorname{arsinh} x}{2} + \frac{\sinh 2 \operatorname{arsinh} x}{4} - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

Az általános megoldás tehát

$$y(x) = C_1 \left(\frac{\operatorname{arsinh} x}{2} + \frac{\sinh 2 \operatorname{arsinh} x}{4} - \frac{x^2}{2} \right) + C_2.$$

7. Határozza meg az $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2$, tehát a -1 kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cx^2e^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 2Cxe^x - Cx^2e^x \\
y''(x) &= 2Ce^x - 4Cxe^x + Cx^2e^x,
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2Ce^x = xe^x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C = \frac{1}{2}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.