

Matematika szigorlat G (A3) – 2023. július 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát szigorúan monoton növekvő korlátos számsorozatra.
3. Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságának fogalmát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \left(n^5 + 7n^2 + \frac{2^{2n}}{n^3} \right) (x-2)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg az

$$\begin{aligned} -3x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 0 \\ bx_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a, b valós paraméterek függvényében.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ vektormezőt az $A = (1, 1, 2)$ kezdőpontú és $B = (-1, 1, 0)$ végpontú szakasz mentén.
6. Határozza meg a $\sqrt{1+x^2}y'' + y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Határozza meg az $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.