Matematika szigorlat G – 2023. szeptember 28.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát korlátos divergens számsorozatra.

   Megoldás. Valós számsorozatnak az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket nevezzük. Például $a_n = (-1)^n$.

3. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha f és g olyan függvények, hogy g differenciálható az x_0 pontban és f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le a_n \le b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t.$

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

    Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx} \,\mathrm{d}z$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

   Megoldás. $D_f = (0, \infty)$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye 1. A határérték a L'Hospital-szabály alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} \\ &= \lim_{x\to 0+} -2x^2 = 0,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty.$$

   A deriváltak

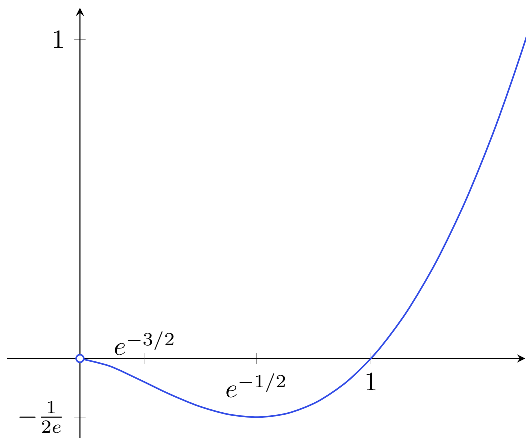
$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln(x) + 1) \\ f''(x) &= 2\ln(x) + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln(x) + 3,\end{aligned}$$

   f' zérushelye $e^{-1/2}$, f'' zérushelye $e^{-3/2}$. Az előjelek:

	$(0, e^{-3/2})$	$e^{-3/2}$	$(e^{-3/2}, e^{-1/2})$	$e^{-1/2}$	$(e^{-3/2}, \infty)$
f	╮	infl	╰	min	╯
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x \ln x = \infty,$$

   tehát nincs ferde aszimptota. $R_f = [-\frac{1}{2e}, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^{4x}}{e^x + e^{2x}} \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás. Alkalmazzunk $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x \,\mathrm{d}x$ helyettesítést.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4x}}{e^x + e^{2x}} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^3}{t + t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{t^2}{1+t} \,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \\ &= \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(1 + e^x) + C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} x^n$ hatványsor konvergenciasugarát.

Megoldás. A hatványsor együtthatói $a_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} > 0$, a hányadoskritérium alapján ha létezik $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ határértéke, akkor egyenlő a konvergenciasugárral. Ennek alapján a konvergenciasugár

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(3n)!}{n!(2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+2)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n)!(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!n!(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

4. Adja meg a tér $z = 0$ síkra vonatkozó tükrözésének az $(-\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}, \mathbf{j}-2\mathbf{k})$ bázisra vonatkozó mátrixát, és határozza meg a kapott mátrix sajátértékeit.

Megoldás. A mátrix sajátértékei megegyeznek a transzformáció sajátértékeivel, tehát 1 (kétszeres multiplicitással) és -1 (egyszeres).
Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisra nézve a transzformáció mátrixa

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

az áttérés mátrixa

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

, ezzel a megadott bázisra vonatkozó mátrix $S^{-1}MS$. Határozzuk meg az inverz mátrixot:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$
$$\overset{s_1\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1+(s_2+s_3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

A transzformáció mátrixa a megadott bázisra nézve

$$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y^2)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.

Megoldás. A vektormező mindenhol értelmezett, tehát pontosan akkor potenciálos, ha a rotációja mindenhol 0.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y, z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
&= (0 - 0)\mathbf{i} + (2z - 2z)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = 0,
\end{aligned}$$

tehát létezik potenciálfüggvény. Egy lehetséges ilyen

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= \int_0^x u_x(\xi, 0, 0)\, \mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x, \eta, 0)\, \mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x, y, \zeta)\, \mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x 0\, \mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2 + 3\eta^2)\, \mathrm{d}\eta + \int_0^z (2x\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \\
&= x^2 y + y^3 + xz^2.
\end{aligned}$$

6. Hol van a tömegközéppontja az $x^2+y^2+z^2=1$ egyenletű felület $0 \le y \le x$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?

Megoldás. A felület az egységgömb darabja, a szokásos $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)=\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}$ paraméterezést használva a $0\le y\le x$ darabnak megfelelő paramétertartomány $[0,\pi]\times[0,\pi/4]$, a normálvektor abszolútértéke

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\mathrm{d}\vartheta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|=|\sin\vartheta\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)|=\sin\vartheta.$$

A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a felszín hányadosai, a szükséges integrálok

$$\begin{aligned}
\iint 1\,\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\\
\iint x\,\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\cos\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\\
\iint y\,\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\sin\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\iint z\,\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi==0.
\end{aligned}$$

A tömegközéppont helye tehát $(\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

7. Oldja meg az $y''+2y'+2y=2$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+2\lambda+2=(\lambda+1)^2+1$, tehát a gyökök $-1\pm i$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x$.
Az inhomogén tag konstans, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x)=C$ alakban. A deriváltak $y'(x)=y''(x)=0$, az egyenletbe behelyettesítve $2C=2$ adódik, tehát $C=1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned}
y(x)&=1+Ae^{-x}\cos x+Be^{-x}\sin x\\
y'(x)&=-Ae^{-x}\cos x-Ae^{-x}\sin x-Be^{-x}\sin x+Be^{-x}\cos x.
\end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}
0&=y(0)=1+A\\
0&=y'(0)=-A+B,
\end{aligned}$$

tehát $A=B=-1$. A keresett megoldás $y(x)=1-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$.