Matematika szigorlat G – 2023. szeptember 28.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát korlátos divergens számsorozatra.
3. Mondja ki az összetett függvény x_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó láncszabályt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int \frac{e^{4x}}{e^x + e^{2x}} \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} x^n$ hatványsor konvergenciasugarát.
4. Adja meg a tér $z = 0$ síkra vonatkozó tükrözésének az $(-\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ bázisra vonatkozó mátrixát, és határozza meg a kapott mátrix sajátértékeit.
5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y^2)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.
6. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $0 \le y \le x$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?
7. Oldja meg az $y'' + 2y' + 2y = 2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.