Matematika szigorlat G – 2024. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.

   Megoldás. $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

3. Írja fel az f differenciálható függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét.

   Megoldás. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?

   Megoldás. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, pontosan akkor konvegens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege $\frac{a}{1-q}$.

5. Írja fel a sík $x = y$ egyenesre vonatkozó tükrözésének mátrixát a szokásos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.

   Megoldás. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a sajátértékek ± 1.

6. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.

   Megoldás. A megoldás akkor egyértelmű, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?

   Megoldás. $\displaystyle\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ a V egy környezetében folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{3n - \sqrt{4n^2+5}}{\sqrt{n^2+n+3}+2n}$$
$$b_n = \frac{(n+1)^{2n}}{(n^2+1)^n}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n - \sqrt{4n^2+5}}{\sqrt{n^2+n+3}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \sqrt{4+\frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+2} = \frac{1}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(n^2+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{2n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}}\right]^{\frac{2n^2}{n^2+1}} = e^2.$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. Alkalmazzunk $x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ helyettesítést:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3+t^2} 6t^5\,\mathrm{d}t = \int \frac{6t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

3. Határozza meg az f függvény Fourier-sorát, ha 2π szerint periodikus és $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = e^{|x|}$.

Megoldás. A függvény páros, emiatt a Fourier-sora tisza koszinusz sor: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_0^{\pi} = e^{\pi} - 1,$$

a másik integrált parciális integrálással számolhatjuk ki:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^x \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= [e^x \cos nx]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\,(-n\sin nx)\,\mathrm{d}x \\
&= [e^x \cos nx]_0^\pi + n\int_0^\pi e^x \sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= [e^x \cos nx]_0^\pi + n\,[e^x \sin nx]_0^\pi - n^2\int_0^\pi e^x \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= ((-1)^n e^\pi - 1) - n^2 \int_0^\pi e^x \cos nx\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

amiből átrendezéssel

$$
\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}
$$

adódik. A Fourier-sor

$$
\frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}\cos(nx).
$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x,y) = 3x^3 + xy^2 + 2xy$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 9x^2 + 2y + y^2 \\
f'_y(x,y) &= 2x + xy = 2x(1+y),
\end{aligned}
$$

   a zérushelyek $(0,0)$, $(0,-2)$, $(\pm\frac{1}{3},-1)$. A Hesse-mátrix

$$
H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x & 2y+2 \\ 2y+2 & 2x \end{bmatrix},
$$

$$
H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad H(0,-2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad H(\pm\frac{1}{3},-1) = \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \pm\frac{2}{3} \end{bmatrix}.
$$

   $\det H(0,0) = \det H(0,-2) = -4 < 0$, tehát $(0,0)$ és $(0,-2)$ nyeregpontok, $\det H(\pm\frac{1}{3},-1) = 4 > 0$, a diagonális elelemek előjele alapján $(\frac{1}{3},-1)$ lokális minimumhely, $(-\frac{1}{3},-1)$ lokális maximumhely.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = (-2y-z)\mathbf{i} + (2x+2z)\mathbf{j} + (x-2y)\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+y^2=1$ és $x=z$ felületek metszésvonalán a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.

   Megoldás. Az irányított görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$, $t \in [0,2\pi]$, a derivált $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k}$, a vektormező értéke a görbén

$$
\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = (-2\sin t - \cos t)\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + (\cos t - 2\sin t)\mathbf{k}.
$$

   Az integrál

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} ((-2\sin t - \cos t)\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + (\cos t - 2\sin t)\mathbf{k})\cdot(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)\mathrm{d}t \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

6. Oldja meg a $e^x \ln y + \sin x + \dfrac{e^x y'}{y} = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ alakú, ahol

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{e^x}{y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(\xi,1)\,\mathrm{d}\xi+\int_1^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta=\int_0^x \sin\xi\,\mathrm{d}\xi+\int_1^y \frac{e^x}{\eta}\,\mathrm{d}\eta\\&=[-\cos\xi]_0^x+[e^x\ln\eta]_1^y=1-\cos x+e^x\ln y.\end{aligned}$$

Az általános megoldás $u(x,y(x))=C$, a kezdeti feltétel alapján $C=u(0,y(0))=u(0,1)=0$, tehát a keresett megoldás implicit alakja $1-\cos x+e^x\ln y(x)=0$.

7. Oldja meg az $y''+6y'+9y=e^{-3x}\cos x$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2$, tehát a -3 kétszeres gyök. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-3x}+Bxe^{-3x}$.
Az inhomogén tag exponenciális és trigonometrikus szorzata, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x)=Ce^{-3x}\cos x+De^{-3x}\sin x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x)&=(-3C+D)e^{-3x}\cos x+(-C-3D)e^{-3x}\sin x\\y''(x)&=(8C-6D)e^{-3x}\cos x+(6C+8D)e^{-3x}\sin x,\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$-Ce^{-3x}\cos x-De^{-3x}\sin x=e^{-3x}\cos x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C=-1$ és $D=0$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x)=-e^{-3x}\cos x+Ae^{-3x}+Bxe^{-3x}$, deriváltja $y'(x)=3e^{-3x}\cos x+e^{-3x}\sin x-3Ae^{-3x}+Be^{-3x}-3Bxe^{-3x}$. A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0&=y(0)=-1+A\\1&=y'(0)=3-3A+B,\end{aligned}$$

ebből $A=1$, $B=1$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x)=-e^{-3x}\cos x+e^{-3x}+xe^{-3x}$.