

Matematika szigorlat G – 2024. január 10.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.
3. Írja fel az f differenciálható függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét.
4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Írja fel a sík $x = y$ egyenesre vonatkozó tükrözésének mátrixát a szokásos \mathbf{i}, \mathbf{j} bázisban, és adja meg a mátrix sajátértékeit.
6. Adjon szükséges és elégséges feltételt homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának egyértelműségére az együtthatómátrix rangja segítségével.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) megadott felületdarab felszínét?
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.
10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{3n - \sqrt{4n^2 + 5}}{\sqrt{n^2 + n + 3} + 2n}$$

$$b_n = \frac{(n+1)^{2n}}{(n^2+1)^n}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

3. Határozza meg az f függvény Fourier-sorát, ha 2π szerint periodikus és $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = e^{|x|}$.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 + 2xy$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (-2y - z)\mathbf{i} + (2x + 2z)\mathbf{j} + (x - 2y)\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = 1$ és $x = z$ felületek metszéspontján a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.
6. Oldja meg a $e^x \ln y + \sin x + \frac{e^x y'}{y} = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \cos x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.