Matematika szigorlat G – 2024. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

3. Definiálja egy $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0,b]$ intervallumon, ahol $0 \le b$, és létezik a $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.

   Megoldás. Az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens, ha $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ és divergens, ha $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

   Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.

   Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\,du\,dv$ módon számítható, ha $\frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1-szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ az S egy környezetében folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

    Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$b_n = \frac{n^4 - n^2 + 2^n}{\ln(n+1) + 7n^2 - 3n^8}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^2 = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n^2 + 2^n}{\ln(n+1) + 7n^2 - 3n^8} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^8} \frac{n^4 2^{-n} - n^2 2^{-n} + 1}{\frac{\ln(n+1)}{n^8} + 7n^{-6} - 3} = -\infty.\end{aligned}$$

2. Végezze el az $f(x) = (3x^2+1)e^{-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (3x^2+1)e^{-x^2} = 0.$$

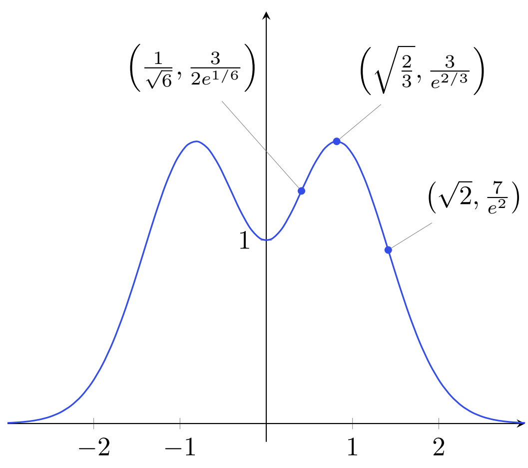
A deriváltak

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6xe^{-x^2} + (3x^2+1)e^{-x^2}(-2x) = (4x - 6x^3)e^{-x^2} \\ f''(x) &= (4 - 18x^2)e^{-x^2} + (4x - 6x^3)e^{-x^2}(-2x) = (12x^4 - 26x^2 + 4)e^{-x^2},\end{aligned}$$

f' zérushelyei 0 és $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, f'' zérushelyei $\pm\sqrt{2}$ és $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Az előjelek:

	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{6}})$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$(\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$
f	min		infl		max		infl	
f'	0	+	+	+	0	−	−	−
f''	+	+	0	−	−	−	0	+

Láttuk, hogy az x-tengely a $+\infty$ irányban vízszintes aszimptota. $R_f = (0, \frac{3}{e^{2/3}}]$, grafikon:



3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda)-(-3)\cdot(-2)\right]-(-4)\left[-1\cdot(2-\lambda)-(-3)\cdot 4\right] \\
&\quad + (-3)\left[-1\cdot(-2)-(-2-\lambda)\cdot 4\right] \\
&= -\lambda^3+\lambda^2+2\lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2),
\end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0, -1 és 2. Mivel minden sajátérték egyszeres, létezik sajátvektorokból álló bázis.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 0\cdot I = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+s_1 \\ s_3-4s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 14 & 14 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-6)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 14 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_1+4s_2 \\ s_3-14s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-1)\cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+2s_1 \\ s_3+4s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_3-s_2 \\ s_2/(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-1)\cdot I = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3+4s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 0 & -18 & -12 \end{bmatrix} \overset{s_2/(-6)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.

4. Számítsa ki az $f(x,y) = ye^{x^2}$ függvény integrálját az $y \geq 0$ félsík $x = y^2$ és $x = 1$ egyenletű görbék által határolt korlátos darabján.
Megoldás. A tartomány $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$, az integrál

$$\begin{aligned}
\int_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} ye^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}e^{x^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{4}e^{x^2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{e-1}{4}.
\end{aligned}$$

5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x,y,z) = (2xy - yz + 2z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y^2 - xz)\mathbf{j} + (-xy + 4xz)\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.
Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial y} &= 2x - z = \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
\frac{\partial u_y}{\partial z} &= -x = \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
\frac{\partial u_z}{\partial x} &= -y + 4z = \frac{\partial u_x}{\partial z},
\end{aligned}$$

tehát a vektormező potenciálos. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2+3\eta^2)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z (-xy+4x\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \left[x^2\eta + \eta^3\right]_{\eta=0}^{y} + \left[-xy\zeta + 2x\zeta^2\right]_{\zeta=0}^{z} \\
&= x^2y + y^3 - xyz + 2xz^2.
\end{aligned}$$

6. Oldja meg a

$$y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x^2+2x+2}$$

differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{x^2+2x+2},$$

mindkét oldalát integráljuk:

$$\int_0^x \frac{y'(\xi)}{\sqrt{1+y(\xi)^2}}\,\mathrm{d}\xi = [\operatorname{arsinh} y(\xi)]_0^x = \operatorname{arsinh} y(x) - \operatorname{arsinh} y(0) = \operatorname{arsinh} y(x),$$

$$\int_0^x \frac{1}{\xi^2+2\xi+2}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1}{(\xi+1)^2+1}\,\mathrm{d}\xi = [\arctan(\xi+1)]_0^x = \arctan(x+1) - \arctan 1 = \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}.$$

A két kifejezés egyenlő, az egyenlet átrendezésével kapjuk a megoldást: $y(x) = \sinh(\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4})$.

7. Határozza meg az $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$, tehát a -1 kétszeres gyök. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.
Az inhomogén tag exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cx^2e^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2Cxe^{-x} - Cx^2e^{-x} \\ y''(x) &= 2Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x}, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2Ce^x = e^x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $2C = 1$, azaz $C = \frac{1}{2}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.