Matematika szigorlat G – 2024. január 17.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.
4. Ismertesse a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritériumot.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{n^4 - n^2 + 2^n}{\ln(n+1) + 7n^2 - 3n^8}$$

2. Végezze el az $f(x) = (3x^2 + 1)e^{-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Számítsa ki az $f(x, y) = ye^{x^2}$ függvény integrálját az $y \geq 0$ félsík $x = y^2$ és $x = 1$ egyenletű görbék által határolt korlátos darabján.
5. Potenciálos-e az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy - yz + 2z^2)\mathbf{i} + (x^2 + 3y^2 - xz)\mathbf{j} + (-xy + 4xz)\mathbf{k}$ vektormező? Ha igen, határozza meg egy potenciálfüggvényét.
6. Oldja meg a

$$y' = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{x^2 + 2x + 2}$$

differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

7. Határozza meg az $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.