Matematika szigorlat G – 2024. január 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

   Megoldás. $r(\cos\varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ módon jelölt fogalmat.

   Megoldás. Az (a_n) valós számsorozat határértéke ∞, ha $\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \geq K$.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletekkel vektortér $\mathbb{R}$ felett, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t$.

8. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

    Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \ldots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r-1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = (-1, \infty)$, nem páros, nem páratlan, zérushelye $x = 0$.

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^3} + 1}} = 0.$$

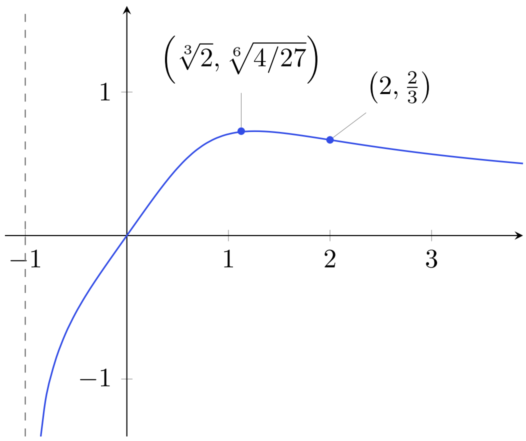
A deriáltak

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^3} + x\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{1+x^3} = \frac{2-x^3}{2(1+x^3)^{3/2}}$$
$$f''(x) = \frac{-6x^2(1+x^3)^{3/2} - (2-x^3)\cdot 3\sqrt{1+x^3}}{4(1+x^3)^3} = \frac{3x^2(x^3-8)}{4(1+x^3)^{5/2}},$$

f' zérushelye $\sqrt[3]{2}$, f'' zérushelyei 0 és 2. Az előjelek:

	$(-1,0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, 2)$	2	$(2, \infty)$
f	◜	◜	◜	max	◝	infl	◟
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Láttuk, hogy az x-tengely a $+\infty$ irányban vízszintes aszimptota. $R_f = (-\infty, \sqrt[6]{4/27}]$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A primitív függvényt $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel és parciális integrálással határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2}{e^t} 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \int 2t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -2t^3e^{-t} + \int 6t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -2t^3e^{-t} - 6t^2e^{-t} + \int 12te^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -2t^3e^{-t} - 6t^2e^{-t} - 12te^{-t} + \int 12e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -2t^3e^{-t} - 6t^2e^{-t} - 12te^{-t} - 12e^{-t} \\
&= \left(-2x^{3/2} - 6x - 12\sqrt{x} - 12\right) e^{-\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

Az integrál

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[\left(-2x^{3/2} - 6x - 12\sqrt{x} - 12\right)e^{-\sqrt{x}}\right]_0^\omega = 12.$$

3. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n3^{-n}$ sor összegét.

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

A keresett numerikus sor $x = \frac{1}{3}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

4. Határozza meg az

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= b \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a, b valós paraméterek függvényében.

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{array}\right] \overset{s_2 - s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{array}\right] \overset{s_3 - s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-1 \end{array}\right]$$

Ez lépcsős alakú a paraméterek bármely értéke mellett, tehát a rang megegyezik a nem nulla sorok számával. Ha $a \neq -1$, akkor az együtthatómátrix rangja 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát ekkor pontosan egy megoldás van. Ha $a = -1$ és $b = 1$, akkor az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 2, ami kisebb az ismeretlenek számánál, tehát végtelen sok megoldás van. Ha $a = -1$ és $b \neq 1$, akkor az együtthatómátrix rangja kisebb mint a kibővített mátrix rangja, tehát ekkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{v}\cos u\mathbf{i} + \sqrt{v}\sin u\mathbf{j} + v^{3/2}\mathbf{k}$ egyenletű felület $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 1]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszínét.

Megoldás. A normálvektor abszolútértéke

$$|\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)| = \left|(-\sqrt{v}\sin u\mathbf{i} + \sqrt{v}\cos u\mathbf{j}) \times \left(\frac{\cos u}{2\sqrt{v}}\mathbf{i} + \frac{\sin u}{2\sqrt{v}}\mathbf{j} + \frac{3\sqrt{v}}{2}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{3}{2}v\cos u\mathbf{i} + \frac{3}{2}v\sin u\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+9v^2}.$$

A felszín ennek integrálja a paramétertartományon, $3v = \sinh t$, $\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{1+9v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \pi \int_0^1 \sqrt{1+9v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi}{3} \int_0^{\operatorname{arsinh} 3} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{3} \int_0^{\operatorname{arsinh} 3} \frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{3} \left[\frac{2t+\sinh 2t}{4}\right]_0^{\operatorname{arsinh} 3} \\
&= \pi \frac{2\operatorname{arsinh} 3 + \sinh 2(\operatorname{arsinh} 3)}{12}.
\end{aligned}$$

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $ABCD$ téglalap oldalain ebben a sorrendben körüljárva, ha a csúcsok $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,3,1)$ és $D(1,3,1)$.

   Megoldás. A görbe zárt, így az integrál kiszámításához használhatjuk a Stokes-tételt.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= z^2\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

   A téglalap paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $u \in [1,2]$, $v \in [1,3]$, a normálvektor $\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v) = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Az integrál

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \\
&= \int_1^3 \int_1^2 \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_1^3 \int_1^2 (v^2 - 2uv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_1^3 (v^2 - 3v)\,\mathrm{d}v = -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

7. Határozza meg az $(1+x^2)y' - 2xy = 1 - x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

   Mindkét oldalt integráljuk:

$$\ln y(x) = \ln(1+x^2) + C,$$

   tehát $y(x) = C(1+x^2)$. Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)(1+x^2)$ alakban keressük. Az egyenletbe helyettesítve

$$(1+x^2)^2 c'(x) = 1 - x^2,$$

   azaz $c'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ adódik, amiből integrálással

$$c(x) = \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + C.$$

   Tehát az egyenlet általános megoldása $y(x) = c(x)(1+x^2) = x + C(1+x^2)$.