Matematika szigorlat G – 2024. január 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a+bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a<0$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Definiálja a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ módon jelölt fogalmat.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontban érinti.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-n}$ sor összegét.
4. Határozza meg az

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= b \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásszámát az a, b valós paraméterek függvényében.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(u,v) = \sqrt{v}\cos u\mathbf{i} + \sqrt{v}\sin u\mathbf{j} + v^{3/2}\mathbf{k}$ egyenletű felület $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,1]$ paramétertartománynak megfelelő darabjának a felszínét.
6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $ABCD$ téglalap oldalain ebben a sorrendben körüljárva, ha a csúcsok $A(1,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(2,3,1)$ és $D(1,3,1)$.
7. Határozza meg az $(1+x^2)y' - 2xy = 1 - x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.