Matematika szigorlat G – 2024. február 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $-2+2i$ számot.

   Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0,b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b < 1$, és létezik a $\lim_{b\to 1-} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és 1 közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Pontosan akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.

   Megoldás. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletekkel valós vektortér, ha $+$ kommutatív, asszociatív, létezik rá nézve neutrális elem (0) és inverz (v inverze $-v$), $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, $\forall v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$, és $\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ és $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ teljesül.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ pontban érinti.

   Megoldás. $z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?

   Megoldás. $\mathbf{v}$ potenciálos, ha létezik olyan f függvény, amivel $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ teljesül.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

   Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$
$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^4 + 3n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3}}$$

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \frac{1}{e}.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4 + 3n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^4 + 3n^3 + 1} + \sqrt{n^4 - n^3}\right)}{n^4 + 3n^3 + 1 - (n^4 - n^3)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^4 + 3n^3 + 1} + \sqrt{n^4 - n^3}\right)}{4n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{4 + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f nem páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye. A határértékek:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to -1\pm} f(x) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \pm\infty.$$

A deriváltak

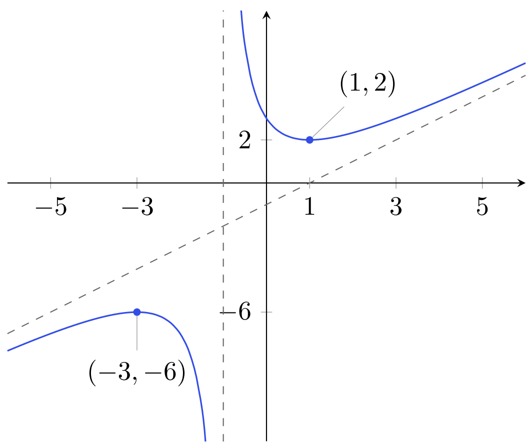
$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2 + 3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x - 3) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3},$$

tehát f' zérushelyei -3 és 1, f'' sehol nem 0. $f(-3) = -6$, $f(1) = 2$ Az előjeleket a következő táblázat foglalja össze:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
f		max		X		min	
f'	+	0	-	X	-	0	+
f''	-	-	-	X	+	+	+

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - x}{x + 1} = -1,$$

tehát van ferde aszimptota, az egyenlete $y = x - 1$ (mindkét irányban). $R_f = (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$, grafikon:



3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \text{ vagy } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát, és annak segítségével számítsa ki a $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$ numerikus sor összegét.

Megoldás. f páros, emiatt a $\sin(nx)$ tagok eltűnnek. A megmaradó együtthatókat a következő integrálokból kapjuk:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$$

$$= \begin{cases} (-1)^k \frac{2}{\pi}\frac{1}{2k+1} & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

A Fourier-sor tehát

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{\pi}\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)x.$$

Mivel f szakaszonként folytonosan differenciálható, a Fourier-sor minden olyan pontban f értékéhez konvergál, ahol f folytonos. Az $x = 0$ helyen

$$1 = f(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2}{\pi}\frac{1}{2k+1}, \text{ tehát}$$

ebből átrendezéssel

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Diagonalizálható-e a mátrix ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 5 \\ -2 & -4-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\left[(-4-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)\cdot 0\right] - 4\left[-2\cdot(-3-\lambda) - (-2)\cdot(-1)\right] \\ &\quad + 5\left[-2\cdot 0 - (-4-\lambda)\cdot(-1)\right] \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda+2)^2, \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek 0 és -2 (kétszeres algebrai multiplicitással).
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - 0\cdot I = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 + 3s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{s_3 + s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$A - (-2)\cdot I = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2 - 2s_1 \\ s_3 + 5s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_3 + 2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

tehát a sajátvektorok $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ nullától különböző többszörösei.
Mivel csak két lineárisan független sajátvektort találunk, nem létezik sajátvektorokból álló bázis, így A nem diagonalizálható.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletű felület $0 \le z \le 1$ egyenlőtlenség által meghatározott darabján lefelé (a $z < 0$ féltér felé) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A megadott felület kúppalást, egy paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, a paramétertartomány $[0,1] \times [0,2\pi]$, a normálvektor

$$\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v) = (\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-u\sin v\mathbf{i} + u\cos v\mathbf{j}) = -u\cos v\mathbf{i} - u\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k},$$

ennek ellentettje mutat lefelé. A vektormező értéke a felületen

$$(u)(\mathbf{r}(u,v)) = u^3\cos v\sin^2 v\mathbf{i} + u^3\cos^2 v\sin v\mathbf{j} + u^3\mathbf{k},$$

az integrál

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} (u)(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}'_u(u,v)\times\mathbf{r}'_v(u,v))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi} (u^3\cos v\sin^2 v\mathbf{i} + u^3\cos^2 v\sin v\mathbf{j} + u^3\mathbf{k})\cdot(-u\cos v\mathbf{i} - u\sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi} (-u^4\cos^2 v\sin^2 v - u^4\cos^2 v\sin^2 v + u^4)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^1 u^4\,\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin^2(2v) + 1\right)\mathrm{d}v \\
&= -\int_0^1 u^4\,\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4}(1-\cos(4v)) + 1\right)\mathrm{d}v \\
&= -\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^1 \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(3+\cos(4v))\,\mathrm{d}v = -\frac{3}{10}\pi.
\end{aligned}$$

6. Oldja meg az $2x^3 - xy^2 + (2y^3 - x^2y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - xy^2) = -2xy = \frac{\partial}{\partial x}(2y^3 - x^2y)$$

miatt az egyenlet egzakt. Egy potenciál

$$u(x,y) = \int_0^x 2\xi^3\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (2\eta^3 - x^2\eta)\,\mathrm{d}\eta = \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2}$$

Az általános megoldás $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltételből $C = u(0,1) = \frac{1}{2}$, a $(0,1)$ ponton áthaladó megoldás explicit alakja

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{4 - 3x^2}}}{\sqrt{2}}.$$

7. Határozza meg az $y' + y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. $y' + y = 0$ állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda + 1$, gyöke -1, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x}$. Az inhomogén egyenletet az állandók variálásával lehet megoldani, a megoldás $y(x) = c(x)e^{-x}$, ahol

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

tehát $c'(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$. A primitív függvényt $e^x = t$, $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ helyettesítéssel kereshetjük meg:

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t - \arctan t = e^x - \arctan e^x + C,
\end{aligned}$$

tehát az általános megoldás

$$y(x) = 1 - e^{-x}\arctan e^x + Ce^{-x}.$$