Matematika szigorlat G – 2024. február 23.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $-2+2i$ számot.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.
4. Adjon szükséges és elégséges feltételt lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x,y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Mikor nevezünk egy $\mathbf{v}$ vektormezőt (skalár-)potenciálosnak?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$
$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+3n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3}}$$
2. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \text{ vagy } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$
függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát, és annak segítségével számítsa ki a $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$ numerikus sor összegét.
4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Diagonalizálható-e a mátrix ($\mathbb{C}$ felett)?
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+y^2=z^2$ egyenletű felület $0 \le z \le 1$ egyenlőtlenség által meghatározott darabján lefelé (a $z<0$ féltér felé) mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg az $2x^3 - xy^2 + (2y^3 - x^2y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0)=1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y' + y = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$ differenciálegyenlet általános megoldását.