Matematika szigorlat G – 2024. június 13.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Hogyan jellemezhető egy kétszer differenciálható függvény konvexitása a második derivált segítségével?

   Megoldás. Egy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.

3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.

   Megoldás. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.

   Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le a_n \le b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

5. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát abszolút konvergens Leibniz-sorra.

   Megoldás. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor, ha a tagok váltakozó előjelűek, $|a_n|$ monoton csökken és $|a_n| \to 0$. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$.

6. Adja meg a mátrixok rangjának három ekvivalens jellemzését.

   Megoldás. Néhány példa: oszlop/sorvektorok által kifeszített altér dimenziója, lineárisan független oszlop/sorvektorok maximális száma, maximális méretű nemnulla determinánsú négyzetes részmátrix mérete, képtér dimenziója, lépcsős/redukált lépcsős alakban a nemnulla sorok száma.

7. Definiálja egy $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ függvény Lipschitz-folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. $\mathbf{r}$ Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, amire $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén $|\mathbf{r}(x_1) - \mathbf{r}(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u}\, \mathrm{d}V$

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n^4 + n} - n^2}$$
$$b_n = n(\ln(n+2) - \ln n)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n^4 + n} - n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(e^{1/n} - 1)(\sqrt{n^4 + n} + n^2)}{n^4 + n - n^4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} (\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + 1) \\ &= 2,\end{aligned}$$

mivel $\frac{1}{n} \to 0$ és $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n(\ln(n+2) - \ln n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right] \\ &= \ln(e^2) = 2.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x \arctan x \,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \arctan x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x\right]_0^1 \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [-\pi/3, \pi/3] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/3] \text{ vagy } x \in [\pi/3, \pi] \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

Megoldás. A függvény páros, ezért a Fourier-sora tisztán koszinusz sor. Az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

és

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{n} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 3k \\ (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{n} & \text{ha } n = 3k+1 \text{ vagy } n = 3k+2. \end{cases}
\end{aligned}$$

A Fourier-sor

$$\frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{n}\cos(nx).$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

   $$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 3 \\ f'_y(x,y) &= 6xy, \end{aligned}$$

   a zérushelyek $(0,\pm 1)$ és $(\pm 1, 0)$. A Hesse-mátrix

   $$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix},$$

   $$H(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 6 \\ \pm 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad H(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{bmatrix}.$$

   $\det H(0,\pm 1) = -36 < 0$, tehát $(0,\pm 1)$ nyeregpontok, $\det H(\pm 1, 0) = 36 > 0$, a diagonális elemek előjele alapján $(1,0)$ lokális minimumhely, $(-1,0)$ lokális maximumhely.

5. Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2 y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 = 2$, $z = 1$ egyenletű körvonalon a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív forgásirány szerint.

   Megoldás. A megadott görbe egy körlap pereme, használhatjuk a Stokes-tételt. A vektormező rotációja

   $$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (-y^2 - x^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

   A körlap paraméterezése $\mathbf{r}(r,\varphi) = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j} + \mathbf{k}$, a paramétertartomány $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, a jobbkéz-szabálynak megfelelően irányított normálvektor

   $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) \times (-r\sin\varphi\mathbf{i} + r\cos\varphi\mathbf{j}) = r\mathbf{k}. \tag{1}$$

   A rotáció kiértékelve a felületen $\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\varphi)) = -r^2\mathbf{k}$, az integrál

   $$\begin{aligned} \int_{\partial S}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}(r,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} (-r^2\mathbf{k})\cdot(r\mathbf{k})\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= -\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} r^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= -2\pi\frac{\sqrt{2}^4}{4} = -2\pi. \end{aligned}$$

6. Oldja meg a $\left(1+\cos(x+y)+\dfrac{1}{y}\right)y'+(-1+\cos(x+y))=0$ differenciálegyenletet $y(0)=1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ alakú, ahol

$$P'_y(x,y)=-\sin(x+y)=Q'_x(x,y),$$

tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(\xi,1)\,\mathrm{d}\xi+\int_1^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\\&=\int_0^x(-1+\cos(\xi+1))\,\mathrm{d}\xi+\int_1^y\left(1+\cos(x+\eta)+\frac{1}{\eta}\right)\mathrm{d}\eta\\&=-x+\sin(x+1)-\sin(1)+y-1+\sin(x+y)-\sin(x+1)+\ln y\\&=-x-\sin(1)+y-1+\sin(x+y)+\ln y,\end{aligned}$$

az általános megoldás $u(x,y(x))=C$ ($C\in\mathbb{R}$). A kezdeti feltételből $C=u(0,y(0))=u(0,1)=0$. A kezdetiérték-probléma megoldása implicit alakban

$$-x-\sin(1)+y(x)+\sin(x+y(x))+\ln y(x)=1.$$

7. Oldja meg az $y''+3y'+2y=1$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2+3\lambda+2\lambda=(\lambda+2)(\lambda+1)$, tehát a gyökök -2 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x}+Be^{-x}$.
Az inhomogén tag polinom, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x)=C_0$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}y'(x)&=0\\y''(x)&=0,\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_0=1$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C_0=\frac{1}{2}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned}y(x)&=\frac{1}{2}+Ae^{-2x}+Be^{-x}\\y'(x)&=-2Ae^{-2x}-Be^{-x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltételből

$$\begin{aligned}0=y(x)&=\frac{1}{2}+A+B\\0=y'(x)&=-2A-B,\end{aligned}$$

tehát $A=\frac{1}{2}$, $B=-1$. A keresett megoldás $y(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}$.