Matematika szigorlat G – 2025. január 8.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét, és adja meg a $-i$ komplex szám harmadik gyökeit.

   Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n. gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Mivel $-i = 1\cdot(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$, ennek harmadik gyökei $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $\cos\frac{7\pi}{7} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ és $\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

2. Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.

   Megoldás. Ha az f függvény invertálható, differenciálható az $f^{-1}(y_0)$ pontban és deriváltja ott nem 0, akkor f^{-1} differenciálható az y_0 pontban, és a deriváltja ott $\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

3. Mondja ki Rolle tételét.

   Megoldás. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, az (a,b) intervallumon differenciálható, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik $c \in (a,b)$, amire $f'(c) = 0$.

4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0,1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.

   Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergens és határértéke ott f, ha $\forall\epsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in H\ \forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Például $f_n(x) = x^n$.

5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

   Megoldás. Akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.

   Megoldás. f folytonos (x_0,y_0)-ban, ha $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$

7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.

   Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex és $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon skalárpotenciál.

8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$

9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

   Megoldás. Egy $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$-en, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$, amire $P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)$ és $Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

    Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{n - 2^{-n} + \ln n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$
$$b_n = n^3 \left(\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n - 2^{-n} + \ln n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2^{-n}\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \left(1 - \cos\frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \frac{1-\cos^2\frac{1}{n}}{1+\cos\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^3 \frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

az utolsó lépésben a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket használva.

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 (x^2-1)\ln x \,\mathrm{d}x$$

Megoldás. A primitív függvényt parciális integrálással kereshetjük meg:

$$\begin{aligned}
\int (x^2-1)\ln x \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + x + C.
\end{aligned}$$

Az integrandus a 0 környezetében nem korlátos, tehát az integrált improprius integrálként értelmezzük:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2-1)\ln x \,\mathrm{d}x &= \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 (x^2-1)\ln x \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\alpha\to 0+} \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + x \right]_\alpha^1 = \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$ sor összegét.

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{1-x} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n-1},\end{aligned}$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

A keresett numerikus sor $x = \frac{1}{4}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{32}{27}.$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?

   Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\ f'_y(x, y) &= 3x + 2y,\end{aligned}$$

   akkor nulla mindkettő, ha $x = y = 0$ vagy $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{9}{4}$.
   A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 2\end{bmatrix},$$

   a $(0, 0)$ pontban indefinit, tehát ez nyeregpont, a $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ pontban pozitív definit, tehát itt lokális minimum van.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = \sinh t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [-1, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

   Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\cosh t\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{\cosh^2 t + \sinh^2 t + 1} = \sqrt{2\cosh^2 t} = \sqrt{2}\cosh t,$$

   az ívhossz

$$I = \int_{-1}^{1} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\cosh t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,[\sinh t]_{-1}^{1} = 2\sqrt{2}\sinh 1.$$

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ felület $u^2 + v^2 \leq 1$ egyenlőtlenség által kijelölt paramétertartománynak megfelelő darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.

   Megoldás. Az irányításnak megfelelő normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2u\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}) = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

   a vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v)) = -v\mathbf{i} - u\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}.$$

A paramétertartomány körlap, érdemes polárkoordinátákat használni: $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Az integrál

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \iint_{u^2+v^2 \le 1} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_{u^2+v^2 \le 1} (2uv + 2uv + u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r^2) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, tehát a -3 kétszeres gyök. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$.
   Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Ce^{3x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= 3Ce^{3x} \\
y''(x) &= 9Ce^{3x},
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$(9C + 18C + 9C)e^{3x} = e^{3x}$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $C = \frac{1}{36}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{36}e^{3x} + Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} \\
y'(x) &= \frac{1}{12}e^{3x} - 3Ae^{-3x} + Be^{-3x} - 3Bxe^{-3x},
\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel

$$\begin{aligned}
0 = y(0) &= \frac{1}{36} + A \\
-1 = y'(0) &= \frac{1}{12} - 3A + B,
\end{aligned}$$

ebből $A = -\frac{1}{36}$ és $B = -\frac{7}{6}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = \frac{1}{36}e^{3x} - \frac{1}{36}e^{-3x} - \frac{7}{6}xe^{-3x}$.