Matematika szigorlat G – 2025. január 8.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n. gyökeinek meghatározásának módszerét, és adja meg a $-i$ komplex szám harmadik gyökeit.
2. Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.
3. Mondja ki Rolle tételét.
4. Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0, 1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.
5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az (x_0, y_0) pontbeli folytonosságának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
9. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?
10. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.
$$a_n = \frac{n - 2^{-n} + \ln n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$
$$b_n = n^3 \left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int_0^1 (x^2 - 1) \ln x \, \mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$ sor összegét.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = \sinh t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [-1, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ felület $u^2 + v^2 \le 1$ egyenlőtlenség által kijelölt paramétertartománynak megfelelő darabján $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ irányítás mellett.
7. Oldja meg az $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$ kezdeti feltétel mellett.