Matematika szigorlat G – 2025. január 15.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékének fogalmát.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.
5. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2 + 15}{\sqrt{x^2 + 3}}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.
$$\int \frac{3x^2 + 3x + 10}{(x+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 3^n}{\sqrt{n!}}(x-2)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 y^2 \sqrt{1 + x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrált.
5. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?
6. Oldja meg a
$$2 + 2x + 2xy + (1 + x^2 + 3y^2)y' = 0$$
differenciálegyenletet $y(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y' + 2xy = 2x^3$ differenciálegyenlet általános megoldását.