Matematika szigorlat G – 2025. január 22.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

   Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

   Megoldás. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$-hez létezik $x \in [a,b]$, amire $f(x) = y$.

3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.

   Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0,b]$ intervallumon, ahol $0 \le b < 1$, és létezik a $\lim_{b\to 1-} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és 1 közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Mit nevezünk Leibniz-típusú sornak? Adjon példát feltételesen konvergens Leibniz-sorra.

   Megoldás. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-típusú, ha a tagok váltakozó előjelűek és $|a_n|$ monoton csökkenően nullához tart. Például $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ feltételesen konvergens.

5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.

   Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots \alpha_k\mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

   Megoldás. Ha $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{yx}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0,y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

   Megoldás. $\displaystyle\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$.

8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

   Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja u, és $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $u(\mathbf{r}(b)) - u(\mathbf{r}(a))$.

9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

    Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = e^{\sqrt{n^2+n}} - e^n$$
$$b_n = \left(\frac{n^2+n+5}{n^2+n+3}\right)^{2n^2-n+5}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n^2+n}} - e^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^n \left(e^{\sqrt{n^2+n}-n} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} e^n \left(e^{\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}} - 1\right) = \infty,
\end{aligned}$$

mivel az első tényező végtelenhez tart, a második tényező határértéke pedig $\sqrt{e} - 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+5}{n^2+n+3}\right)^{2n^2-n+5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+n+3}\right)^{2n^2-n+5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n^2+n+3}\right)^{n^2+n+3}\right]^{\frac{2n^2-n+5}{n^2+n+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{n^2+n+3}\right)^{n^2+n+3}\right]^{\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}} = e^4,
\end{aligned}$$

az utolsó lépésben felhasználva, hogy a szögletes zárójelen belüli kifejezés határértéke e^2, a külső kitevő határértéke pedig 2.

2. Végezze el az $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, páratlan, nem periodikus, zérushelye 0. A határértékek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^5 \left(3 - \frac{10}{x^2} + \frac{15}{x^4}\right) = \pm\infty.$$

A deriváltak

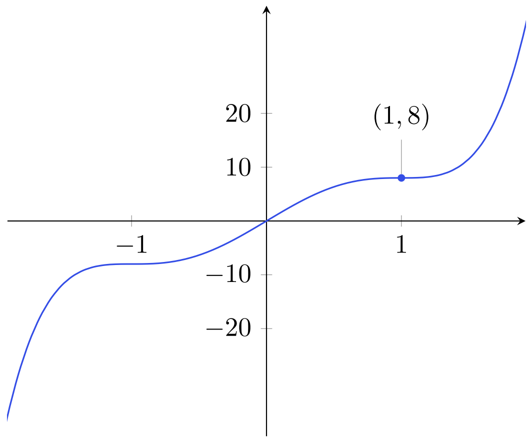
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 15x^4 - 30x^2 + 15 = 15(x+1)^2(x-1)^2 \\
f''(x) &= 60x^3 - 60x = 60x(x-1)(x+1),
\end{aligned}$$

f' zérushelyei ± 1, f'' zérushelyei 0 és ± 1. Az előjelek:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f	$\frown$	infl	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$
f'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \left(3 - \frac{10}{x^2} + \frac{15}{x^4}\right) = \infty,$$

tehát egyik irányban sincs ferde aszimptota. $R_f = \mathbb{R}$, grafikon:



3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sor összegfüggvényét.

   Megoldás. A hatványsort a konvergenciatartomány belsejében tagonként deriválhatjuk:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$
   ha $|x| < 1$. A keresett összegfüggvény ennek primitív függvénye:
$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh} x + C,$$
   a hatványsor konstans tagja $0 = \operatorname{artanh} 0 + C$, tehát $C = 0$ és így
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{artanh} x.$$

4. Számítsa ki az $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} x^2 e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrált.

   Megoldás. Az integrálási tartomány körcikk, polárkoordinátákat érdemes használni: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} x^2 e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2\varphi e^{r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r^3 e^{r^2}\,\mathrm{d}r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$
   az első integrál $t = r^2$, $\mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással
$$\int_0^1 r^3 e^{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^1 t e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[te^t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{2},$$
   a második integrál
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{8},$$
   tehát
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} x^2 e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{16}.$$

5. Integrálja a $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x-y)^2\mathbf{j} + (x-z)^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon ebben a sorrendben körüljárva, ha $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (1, 3, 0)$.

Megoldás. A vektormezőt zárt görbén integráljuk, használhatjuk a Stokes-tételt.

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0-0)\mathbf{i} + (2z-(2x-2z))\mathbf{j} + ((2x-2y)-2y)\mathbf{k} = (4z-2x)\mathbf{j} + (2x-4y)\mathbf{k},$$

a háromszöglap paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = (\mathbf{i}+\mathbf{j}) + u(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + v(2\mathbf{j}) = (1+u)\mathbf{i} + (1+u+2v)\mathbf{j}$, $0 \le u$, $0 \le v$, $u+v \le 1$, a normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} = (\mathbf{i}+\mathbf{j}) \times 2\mathbf{j} = 2\mathbf{k},$$

az irányítás a jobbkéz-szabálynak megfelelő. A rotáció értéke a felületen

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) = (-2-2u)\mathbf{j} + (-2-2u-8v)\mathbf{k},$$

az integrál

$$\begin{aligned}
\int_{ABC} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_{ABC} \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \right) \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-4-4u-16v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (-4(1-u) - 4u(1-u) - 8(1-u)^2)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (-4u^2+16u-12)\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

6. Oldja meg az

$$4\sin^2 x - e^{x+y} - e^{x+y}y' = 0$$

differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
Megoldás. Az egyenlet $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ alakú,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -e^{x+y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciál

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x P(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = \int_0^x (4\sin^2\xi - e^\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (-e^{x+\eta})\,\mathrm{d}\eta \\
&= \left[2\xi - \sin 2x - e^\xi\right]_{\xi=0}^x + \left[-e^{x+\eta}\right]_{\eta=0}^y = 2x - \sin 2x - e^x + 1 - e^{x+y} + e^x \\
&= 2x - \sin 2x + 1 - e^{x+y},
\end{aligned}$$

az általános megoldás $u(x,y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(0,y(0)) = u(0,1) = 1-e$. A megoldás explicit alakban is megadható:

$$y(x) = \ln(2x - \sin 2x + e) - x.$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását.
Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 5$, a gyökök $-2 \pm i$. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$.
Az inhomogén tag trigonometrikus, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C\cos x + D\sin x$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -C\sin x + D\cos x \\
y''(x) &= -C\cos x - D\sin x,
\end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$(4C+4D)\cos x + (-4C+4D)\sin x = \sin x$$

adódik, ez akkor teljesül minden x-re, ha $4C+4D = 0$ és $-4C+4D = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C = -\frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{8}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = -\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\sin x$.