Matematika szigorlat G – 2025. január 22.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Definiálja egy $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ függvény 0 és 1 közötti improprius integrálját.
4. Mit nevezünk Leibniz-típusú sornak? Adjon példát feltételesen konvergens Leibniz-sorra.
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x,y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
9. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
10. Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.
$$a_n = e^{\sqrt{n^2+n}} - e^n$$
$$b_n = \left(\frac{n^2+n+5}{n^2+n+3}\right)^{2n^2-n+5}$$
2. Végezze el az $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sor összegfüggvényét.
4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} x^2 e^{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$ integrált.
5. Integrálja a $\mathbf{v}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\mathbf{i} + (x-y)^2\mathbf{j} + (x-z)^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon ebben a sorrendben körüljárva, ha $A = (1,1,0)$, $B = (2,2,0)$, $C = (1,3,0)$.
6. Oldja meg az
$$4\sin^2 x - e^{x+y} - e^{x+y}y' = 0$$
differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 5y = \sin x$ differenciálegyenlet általános megoldását.