

Matematika szigorlat G – 2025. január 24.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $-1 + i$ számot.
2. Mondja ki a Bolzano-tételt.
3. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.
4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Definiálja a Leibniz-típusú sor fogalmát. Adjon példát abszolút konvergens Leibniz-sorra.
6. Definiálja a valós vektortér fogalmát.
7. Ismertesse egy folytonos vektormező vonalmenti integráljának kiszámítási módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott görbe mentén.
8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.
9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.
10. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 2n}}$$
$$b_n = \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^{n+1}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x \arcsin x \, dx$$

3. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis (\mathbb{C} felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = 8x^3 + 3y^2 - 12xy$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Mekkora a felszíne az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű felület $x^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszerrel megadott darabjának?
6. Oldja meg a $\sqrt{1-x^2}y' = xy^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 2y' = x$ differenciálegyenlet általános megoldását.