Matematika szigorlat G – 2025. március 4.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?
2. Definiálja a valós számsorozat fogalmát, és adjon példát szigorúan monoton növekvő korlátos számsorozatra.
3. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.
4. Írja fel a geometriai (=mértani) számsor általános alakját. Mely feltétel teljesülése mellett lesz a sor konvergens, és mennyi az összege?
5. Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
6. Írja fel az $f(x, y)$ kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli másodrendű Taylor-polinomját.
7. Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező skalárpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciatételt.
10. Definiálja az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

3. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{\sqrt{n+1}}{2n+3}(x-1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.
4. Határozza meg az egyenletrendszer megoldásainak számát az a és b valós paraméterek függvényében.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_3 &= 5 \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b \\ 4x_2 + ax_3 &= 3 \end{aligned}$$

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0, 10]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.
6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2 z\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ egyenletű gömbfelületen kifelé (az origótól távolodó irányba mutató) irányítás mellett.
7. Oldja meg a $y'' + 2y' + y = x$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.