

Matematika szigorlat G – 2025. június 5.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám hányadosát?

Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

Megoldás. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$ -hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

3. Definiálja egy $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény 0 és ∞ közötti improprius integrálját.

Megoldás. Ha f Riemann-integrálható minden $[0, b]$ intervallumon, ahol $0 \leq b$, és létezik a $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$ határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény 0 és ∞ közötti improprius integráljának nevezzük.

4. Mondja ki a pozitív tagú numerikus sorokra vonatkozó minoránskritériumot.

Megoldás. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ és $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

Megoldás. Akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.

Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

Megoldás. $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$.

8. Mondja ki a Stokes-tételt.

Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S , és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.

Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ -en, ha létezik $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$b_n = \frac{e^{\sqrt{n}} + (\sqrt{n})^e}{n^2 + 2^n}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

az utolsó lépésben felhasználva a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határértéket.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n}} + (\sqrt{n})^e}{n^2 + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{2^n} \frac{1 + (\sqrt{n})^e e^{-\sqrt{n}}}{n^2 2^{-n} + 1} = 0, \end{aligned}$$

mivel az első hányados határértéke 0, a másodiké pedig 1.

2. Végezze el az $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

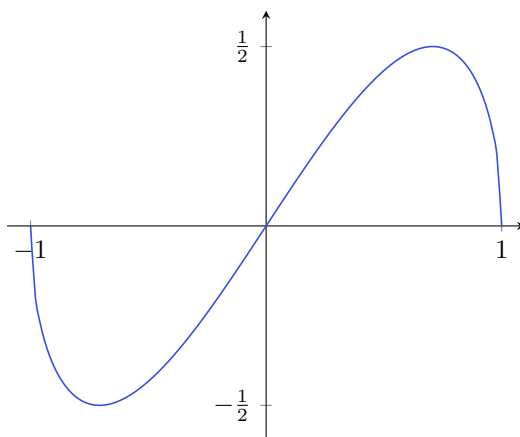
Megoldás. $D_f = [-1, 1]$, páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 0$ és $x = \pm 1$. A deriváltak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ f''(x) &= \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2)\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2} \\ &= \frac{x(x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Az első derivált zérushelyei $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, a második derivált zérushelye $x = 0$. Az előjelek:

	$(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$
f	$\cup$	min	$\cup$	infl	$\cup$	max	$\cup$
f'	-	0	+	+	+	0	-
f''	+	+	+	0	-	-	-

Nincs aszimptota. $R_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, grafikon:



3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ sor összegfüggvényét.

Megoldás.

$$\begin{aligned}x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \right) &= x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \\&= x \frac{d}{dx} \left(x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \right) \\&= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\&= x \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n,\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \right) \\&= x \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} \\&= x \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} \\&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

4. Számítsa ki az $\int_0^1 \int_y^1 y^2 e^{-x^4} dx dy$ integrált.

Megoldás. Felcseréljük az integrálás sorrendjét:

$$\begin{aligned}T &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} \\&= \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\},\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^1 y^2 e^{-x^4} dx dy &= \int_0^1 \int_0^x y^2 e^{-x^4} dy dx \\&= \int_0^1 \frac{x^3}{3} e^{-x^4} dx \\&= \left[-\frac{e^{-x^4}}{12} \right]_0^1 = \frac{e-1}{12e}.\end{aligned}$$

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = -yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ görbe $t \in [0, 1]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.

Megoldás. A derivált $\dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, a vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = -e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

A görbementi integrál

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\&= \int_0^1 (-e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) dt \\&= \int_0^1 (e^t \sin^2 t + e^t \cos^2 t + e^2) dt \\&= 2 \int_0^1 e^t dt \\&= 2 [e^t]_0^1 = 2(e-1).\end{aligned}$$

6. Oldja meg a

$$\sqrt{1-x^2}y' = xy$$

differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztató:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

mindkét oldalt integráljuk.

$$\int_0^x \frac{y'(\xi)}{y(\xi)} d\xi = \ln(y(x)) - \ln(y(0)) = \ln(y(x)),$$

és

$$\int_0^x \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \left[-\sqrt{1-\xi^2} \right]_{\xi=0}^x = -\sqrt{1-x^2} + 1,$$

tehát

$$y(x) = e^{1-\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Határozza meg az $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, tehát a gyökök -1 és -2 . A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Be^{-2x}$.

Az inhomogén tag exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cxe^{-x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ce^{-x} - Cxe^{-x} \\ y''(x) &= -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$-2Ce^{-x} + Cxe^{-x} + 3(Ce^{-x} - Cxe^{-x}) + 2Cxe^{-x} = Ce^{-x} = e^{-x}$$

adódik, ez akkor teljesül minden x -re, ha $C = 1$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = xe^{-x} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$.