

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Hogyan lehet kiszámítani két trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzatát?

Megoldás. Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?

Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a .

3. Mondja ki a Bolzano-tételt.

Megoldás. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$ -hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

4. Hogyan írható fel egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatókat?

Megoldás. $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x)$, ahol

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n}{T} x dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n}{T} x dx$$

5. Adja meg a vektoriális szorzat geometriai definícióját és koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzatának kiszámítási módját.

Megoldás. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektor, amelynek hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma$, ahol γ a két vektor által bezárt szög, merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra, és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszer alkot. Ha $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$.

6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.

Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

7. Ismertesse egy folytonos vektormező felületi integráljának kiszámításának módját folytonosan differenciálható függvénnyel megadott felület mentén.

Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) du dv$ módon számítható, ha $\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1 -szerese, ha azzal ellentétes.

8. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ (legalább V egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV$

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.

Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ -en, ha létezik $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \ln \frac{1-x^2}{6-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{6}, \infty)$, páros, nem páratlan, nem periodikus, nincs zérushelye.

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{6}{x^2} - 1} = \ln 1 = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{6-x^2} = -\frac{10x}{(1-x^2)(6-x^2)}$$

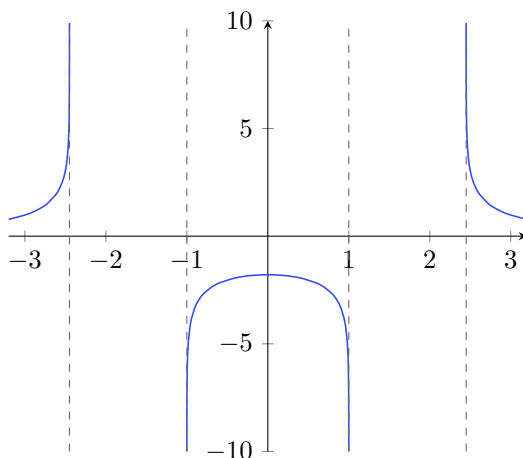
$$f''(x) = -\frac{10(1-x^2)(6-x^2) - 10x(-2x)(6-x^2) - 10x(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2(6-x^2)^2}$$

$$= 10 \frac{3x^4 - 7x^2 - 6}{(1-x^2)^2(6-x^2)^2}.$$

f' zérushelye $x = 0$, a második deriválnak nincs zérushelye a D_f halmazon. Az előjelek:

	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	$(\sqrt{6}, \infty)$
f	$\cup$	$\cap$	max	$\cup$	$\cup$
f'	+	+	0	-	-
f''	+	-	-	-	+

Láttuk, hogy az x -tengely mindkét irányban vízszintes aszimptota. $R_f = (-\infty, -\ln 6) \cup (0, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \sqrt{-5 + 6x - x^2} dx$$

Megoldás. $x = 2 \sin t + 3$, $dx = 2 \cos t dt$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-5 + 6x - x^2} dx &= \int \sqrt{4 - (x-3)^2} dx \\ &= \int 2 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2} dx \\ &= \int 4 \cos^2 t dt \\ &= \int 2(1 + \cos 2t) dt \\ &= 2t + \sin 2t \\ &= 2 \arcsin \frac{x-3}{2} + \sin 2 \arcsin \frac{x-3}{2} + C. \end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n2^n}$ sor összegét.

Megoldás.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

ha $|x| < 1$, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-\xi} d\xi = [-\ln(1-\xi)]_0^x = -\ln(1-x).$$

A keresett numerikus sor $x = -\frac{1}{2}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \ln \frac{2}{3}.$$

4. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékeinél létezik nemtriviális megoldása az

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszernek?

Megoldás. Az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezik, tehát akkor létezik nemtriviális megoldás, ha az együtthatómátrix determinánsa 0.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} \begin{matrix} s_1 - as_4 \\ s_2 - s_4 \\ s_3 - s_4 \\ \hline \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-ab \\ 0 & a-1 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & a-1 & 1-b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-a & 1-a & 1-ab \\ a-1 & 0 & 1-b \\ 0 & a-1 & 1-b \end{vmatrix} \\ = -(a-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-ab \\ 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \stackrel{s_2 \pm s_1}{=} -(a-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-ab \\ 0 & -1 & 2-b-ab \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \\ = (a-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2-b-ab \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = (a-1)^2(ab+2b-3).$$

A második lépésben az első oszlop szerint fejtettük ki, a második lépésben az első két oszlopból $a-1$ emelhető ki, a negyedik lépés az első oszlop szerinti kifejtés. Tehát pontosan akkor létezik nemtriviális megoldás, ha $a=1$ vagy $(a+2)b=3$ teljesül.

5. Számítsa ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ egyenletű görbe $t \in [0, 10]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának ívhosszát.

Megoldás. A derivált abszolútértéke

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)| &= |(-\sin t + \sin t + t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t, \end{aligned}$$

az ívhossz

$$\int_0^{10} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \sqrt{5} \int_0^{10} t dt = \sqrt{5} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} = 50\sqrt{5}.$$

6. Határozza meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{j} + \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)\mathbf{k}$ görbe $t \in [-\pi, \pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabján.

Megoldás. A görbe paraméterezésének deriváltja $\mathbf{r}(t) = -\sin(t)\mathbf{i} - \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{j} - \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)\mathbf{k}$, a vektormező értéke a görbén

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) = \left[\cos(t) + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \mathbf{i} + \left[\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \mathbf{j} + \left[\cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(t) \right] \mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left[\cos(t) + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \sin(t) + \left[\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(t) \right] \sin\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) \right] dt \end{aligned}$$

Mivel teljes perióduson integrálunk, és a három tag egymástól $\pm \frac{2\pi}{3}$ eltolásokban különbözik, az integráljuk megegyezik. Emiatt

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= -3 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(t) \sin(t) + \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin(t) \right] dt \\ &= -3 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(t) \sin(t) + \cos(t) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(t) - \sin(t) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(t) \right] dt \\ &= 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \pi. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A Stokes-tételt is lehet használni: $\text{rot } \mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, a görbe $\sqrt{\frac{3}{2}}$ sugarú kör az $x+y+z=0$ síkban, a kör lap jobbkez-szabály szerinti irányítású normálvektora $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, tehát az integrál a terület $\sqrt{3}$ -szoros, azaz $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

7. Határozza meg az $y' + y = e^{-x}\sqrt{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. Az egyenlet állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda + 1$, tehát a gyök -1 , a homogén egyenlet általános megoldása Ce^{-x} .

Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)e^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítve

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^{-x}\sqrt{x},$$

amiből $c'(x) = \sqrt{x}$. Integrálva $c(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$ adódik, így az általános megoldás $y(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}e^{-x} + Ce^{-x}$.