

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

- Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n . gyökeinek meghatározásának módszerét.
Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n . gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- Definiálja, hogy mit jelent, hogy az f függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a jobboldali határértéke $-\infty$.
Megoldás. $\forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f(x) < K$.
- Mondja ki az egyváltozós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-tételt.
Megoldás. Ha F folytonos az $[a, b]$ intervallumon, differenciálható (a, b) -n, deriváltja ott f és f integrálható, akkor $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Mit nevezünk abszolút konvergencia numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens.
Megoldás. A $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ konvergens. Például $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.
- Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.
- Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.
Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.
- Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?
Megoldás. $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$.
- Mondja ki a Stokes-tételt.
Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S , és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$.
- Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.
- Mit nevezünk szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletnek?
Megoldás. Egy elsőrendű differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \frac{(2n+3)^n}{(2n-1)^n}$$

$$b_n = \sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^n}{(2n-1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{n})^n}{(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n})^n} = \frac{e^{3/2}}{e^{-1/2}} = e^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int x \sin^2 x \, dx$$

Megoldás. Linearizáló formula és parciális integrálás alkalmazásával

$$\begin{aligned}\int x \sin^2 x \, dx &= \int x \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{x}{2} \, dx - \int \frac{x}{2} \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{4} - \int \frac{x}{2} \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \sin 2x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C.\end{aligned}$$

3. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.

Megoldás. A függvényt parciális törtre bontjuk:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

a közös nevezővel megszorozva $1 = A(x+2) + B(x+1) = (A+B)x + (2A+B)$ akkor teljesül minden x esetén, ha

$$0 = A + B$$

$$1 = 2A + B,$$

tehát $A = 1$, $B = -1$. A Taylor-sor két mértani sor összegeként áll elő:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{1 - (-x)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} x^n,\end{aligned}$$

a konvergenciasugár 1.

4. Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Létezik-e sajátvektorokból álló bázis ($\mathbb{C}$ felett)?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 6 & 4 - \lambda & -1 \\ 6 & 6 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 2 \cdot (-1) \cdot 6 + (-2) \cdot 6 \cdot 6 \\ &\quad - (-\lambda) \cdot (-1) \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot (-3 - \lambda) - (-2) \cdot (4 - \lambda) \cdot 6 \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda \\ &= -(\lambda - 3)\lambda(\lambda + 2), \end{aligned}$$

tehát a sajátértékek $-2, 0, 3$. Mivel annyi különböző sajátérték van, amennyi a dimenzió, létezik sajátvektorokból álló bázis.

A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & -1 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

alapján $[1 \ -1 \ 0]^T$ nullvektortól különböző többszörösei.

A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 - s_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

alapján $[-1 \ 2 \ 2]^T$ nullvektortól különböző többszörösei.

A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{s_2 + 2s_1 \\ s_3 + 2s_1}} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

alapján $[0 \ 1 \ 1]^T$ nullvektortól különböző többszörösei.

5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ vektormezőt a $z = x^2 + y^2$ egyenletű felület $x^2 + y^2 \leq 4$ egyenlőtlenség által meghatározott darabján felfelé (a z -tengely pozitív fele felé) mutató irányítás mellett.

Megoldás. A felületdarab egy paraméterezése $\mathbf{r}(r, \phi) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + r^2 \mathbf{k}$, a paramétertartomány $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} + 2r \mathbf{k}) \times (-r \sin \phi \mathbf{i} + r \cos \phi \mathbf{j}) = -2r^2 \cos \phi \mathbf{i} - 2r^2 \sin \phi \mathbf{j} + r \mathbf{k},$$

a vektormező értéke a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi)) = r \sin \phi \mathbf{i} - r \cos \phi \mathbf{j} - r^2 \mathbf{k}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (r \sin \phi \mathbf{i} - r \cos \phi \mathbf{j} - r^2 \mathbf{k}) \cdot (-2r^2 \cos \phi \mathbf{i} - 2r^2 \sin \phi \mathbf{j} + r \mathbf{k}) d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-r^3) d\phi dr = 2\pi \int_0^2 (-r^3) dr = -2\pi \frac{2^4}{4} = -8\pi. \end{aligned}$$

6. Határozza meg az $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 4 - (x - 1)^2 - y^2$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott alakzat tömegközéppontját.

Megoldás. Használjunk hengerkoordináta-rendszert: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, a paramétertartományt megadó egyenlőtlenségek $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 4 - (r \cos \phi - 1)^2 - r^2 \sin^2 \phi = 3 - r^2 + 2r \cos \phi$, a Jacobi-determináns r . A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a térfogat hányadosai. A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r^2+2r \cos \phi} r \, dz \, d\phi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3 - r^2 + 2r \cos \phi) r \, d\phi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (3 - r^2) r \, dr = \frac{5}{2} \pi \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r^2+2r \cos \phi} r \cos \phi \, dz \, d\phi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3 - r^2 + 2r \cos \phi) r \cos \phi \, d\phi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{1}{2} \pi \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r^2+2r \cos \phi} r \sin \phi \, dz \, d\phi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3 - r^2 + 2r \cos \phi) r \sin \phi \, d\phi \, dr = 0 \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r^2+2r \cos \phi} zr \, dz \, d\phi \, dr &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(3 - r^2 + 2r \cos \phi)^2}{2} r \, d\phi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{(3 - r^2)^2 + 2r^2}{2} r \, dr \\ &= \pi \int_0^1 (9 + r^4 - 4r^2) r \, dr = \frac{11}{3} \pi. \end{aligned}$$

A tömegközéppont helye $(\frac{1}{5}, 0, \frac{22}{15})$.

7. Határozza meg az $y'' - 3y' + 2y = x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, tehát a gyökök 1 és 2. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^x + Be^{2x}$.

Az inhomogén tag polinom, nincs rezonancia, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 + 2C_2x \\ y''(x) &= 2C_2, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$2C_0 - 3C_1 + 2C_2 + (2C_1 - 6C_2)x + 2C_2x^2 = x^2$$

adódik, ez akkor teljesül minden x -re, ha $2C_0 - 3C_1 + 2C_2 = 0 = 2C_1 - 6C_2$ és $2C_2 = 1$. Az egyenletrendszer megoldása $C_0 = \frac{7}{4}$, $C_1 = \frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + Ae^x + Be^{2x}$.