

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

- Definiálja egy z komplex szám trigonometrikus alakját. Írja fel trigonometrikus alakban az $-1 - \sqrt{3}i$ számot.
Megoldás. A trigonometrikus alak $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. $-1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$.
- Mondja ki az inverz függvény y_0 pontbeli differenciálhatóságára vonatkozó szabályt.
Megoldás. Ha az f függvény invertálható, differenciálható az $f^{-1}(y_0)$ pontban és deriváltja ott nem 0, akkor f^{-1} differenciálható az y_0 pontban, és a deriváltja ott $\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.
- Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
Megoldás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- Definiálja a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának fogalmát. Adjon példát olyan függvénysorozatra, amely $[0, 1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.
Megoldás. Egy f_n függvénysorozat a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és határértéke ott f , ha $\forall \epsilon \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall x \forall n \geq N_0 : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Például $f_n(x) = x^n$.
- Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.
Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett felett, $L : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. A $\mathbf{v} \in V$ vektor az L lineáris transzformáció $\lambda \in K$ sajátértékéhez tartozó sajátvektora, ha $\mathbf{v} \neq 0$ és $L(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$.
- Definiálja az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltjának fogalmát.
Megoldás. Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor f $\mathbf{e}$ irányú deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban a $t \mapsto f(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{e})$ függvény 0-beli deriváltját nevezzük.
- Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett irányított felület, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor $\mathbf{u}$ felületi integrálja a felületen $\iint_D \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) du dv$ módon számítható, ha $\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}$ iránya a felület irányításának megfelelő, és ennek a -1 -szerese, ha azzal ellentétes.
- Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.
Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja u , és $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $u(\mathbf{r}(b)) - u(\mathbf{r}(a))$.
- Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.
Megoldás. Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $L > 0$ szám, amivel minden $x, x' \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$.
- Definiálja az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.
Megoldás. $(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx} dz$, $\mathcal{L}f$ értelmezési tartománya azon z számok halmaza, amelyre ez az integrál létezik.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = \frac{x^4}{1+x^3}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \frac{1}{\frac{1}{x^3} + 1} = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4}{1-x+x^2} \frac{1}{1+x} = \pm\infty$$

A deriváltak

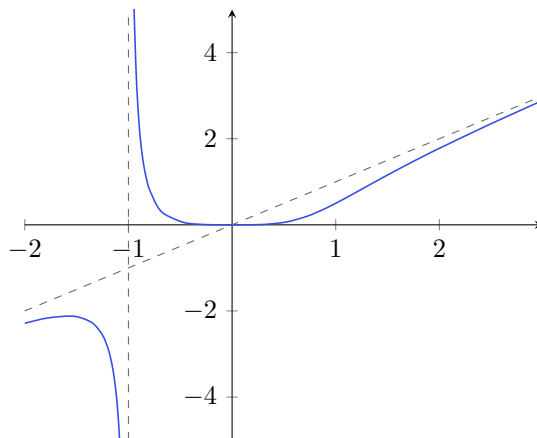
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(1+x^3) - x^4 \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{4x^3 + x^6}{(1+x^3)^2} \\ f''(x) &= \frac{(12x^2 + 6x^5)(1+x^3)^2 - (4x^3 + x^6) \cdot 2(1+x^3) \cdot 3x^2}{(1+x^3)^4} \\ &= -6x^2 \frac{x^3 - 2}{(1+x^3)^3}. \end{aligned}$$

f' zérushelyei 0 és $-\sqrt[3]{4}$, a második derivált zérushelyei 0 és $\sqrt[3]{2}$. Az előjelek:

	$(-\infty, -\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, \infty)$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	X	$\searrow$	min	$\nearrow$	infl	$\nearrow$
f'	+	0	-	X	-	0	+	+	+
f''	-	-	-	X	+	+	+	0	-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \frac{1}{\frac{1}{x^3} + 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x}{1+x^3} = 0, \end{aligned}$$

tehát az $y = x$ egyenes mindkét irányban ferde aszimptota. $R_f = (-\infty, -\frac{4\sqrt[3]{4}}{2}] \cup [0, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

Megoldás. $x = \sin t$, $dx = \cos t \, dt$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2t \, dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{8} \, dt \\ &= \left[\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt[3]{n}} (x+1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. A konvergenciasugár reciproka

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-2)^n}{\sqrt[3]{n}} \right|} = 2,$$

tehát a $(-3/2, -1/2)$ nyílt intervallumon konvergens, de a $\mathbb{R} \setminus [-3/2, -1/2]$ halmazon nem konvergens. A $-3/2$ pontban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt[3]{n}} (-1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

ami a minoránskritérium szerint divergens, mivel $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ és a harmonikus sor divergens.

A $-1/2$ pontban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt[3]{n}} (1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány tehát $(-3/2, -1/2]$.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = (x^2 - y)^2 + (y - 4)^2$ függvény lokális szélsőértékei?

Megoldás. A függvény mindenhol folytonosan differenciálható, így lokális szélsőérték ott lehet, ahol az elsőrendű parciális deriváltak eltűnnek.

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2(x^2 - y) \cdot 2x \\ f'_y(x, y) &= 2(x^2 - y) \cdot (-1) + 2(y - 4), \end{aligned}$$

akkor 0 mindkettő, ha $x = 0$ és $y = 2$ vagy $x = \pm 2$ és $y = 4$.

A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x^2 + 4(x^2 - y) & -4x \\ -4x & 4 \end{bmatrix},$$

$\det H(x, y) = 32x^2 - 16y$ a $(0, 2)$ pontban negatív, tehát ez nyeregpont, a $(\pm 2, 4)$ pontokban pozitív, ezek lokális szélsőérték helyek. Mivel a főátló elemei itt pozitívak, mindkettő lokális minimum hely.

5. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?

Megoldás. A gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}$, a megadott darabnak megfelelő paramétertartomány $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, a normálvektor abszolútértéke

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = \sin \vartheta.$$

A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok és a felszín hányadosai. A szükséges integrálok

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= \frac{\pi}{2} [-\cos \vartheta]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{4} \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= [\sin \varphi]_0^{\pi/2} \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= [-\cos \varphi]_0^{\pi/2} \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\cos 2\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/3} = \frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

A tömegközéppont helye tehát $\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}, \frac{3}{4} \right)$.

6. Határozza meg az $(x^2 + 1)y' - xy = x^3$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + 1},$$

mindkét oldalt integrálva $\ln|y(x)| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = C\sqrt{x^2 + 1}$.

Az inhomogén egyenlet megoldását az állandó variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)\sqrt{x^2 + 1}$ alakban keressük. Behelyettesítve

$$(x^2 + 1)c'(x)\sqrt{x^2 + 1} + (x^2 + 1)c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - xc(x)\sqrt{x^2 + 1} = x^3,$$

tehát

$$c'(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Az integráláshoz $x = \sinh t$, $dx = \cosh t \, dt$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}c(x) &= \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^{3/2}} \, dt = \int \frac{\sinh^3 t}{\cosh^3 t} \cosh t \, dt \\ &= \int \frac{\sinh t (\cosh^2 t - 1)}{\cosh^2 t} \, dt = \int (\sinh t - (\cosh t)^{-2} \sinh t) \, dt \\ &= \cosh t + \frac{1}{\cosh t} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} + C.\end{aligned}$$

Az általános megoldás tehát

$$y(x) = x^2 + 2 + C\sqrt{x^2 + 1}.$$

7. Oldja meg az $y + (x + e^y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú, ahol

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$u(x, y) = \int_0^x P(\xi, 0) \, d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) \, d\eta = \int_0^y (x + e^\eta) \, d\eta = xy + e^y - 1.$$

Az általános megoldás $u(x, y(x)) = C$, a kezdeti feltétel alapján $C = u(0, y(0)) = u(0, 1) = e - 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása implicit alakban tehát $xy(x) + e^{y(x)} = e$.