

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

- Írja le egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n . gyökeinek meghatározásának módszerét.
Megoldás. A komplex számot felírjuk trigonometrikus alakban: $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Ha $r \neq 0$, akkor pontosan n darab n . gyöke van, ezek $\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?
Megoldás. A konvergencia feltétele $-1 < q \leq 1$. Ha $|q| < 1$, akkor a határérték 0, ha $q = 1$, akkor pedig a .
- Mondja ki Rolle tételét.
Megoldás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, az (a, b) intervallumon differenciálható, és tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik $c \in (a, b)$, amire $f'(c) = 0$.
- Definiálja a függvénysorok egyenletes konvergenciájának fogalmát.
Megoldás. Egy f_n függvénysor a H halmazon (ami az értelmezési tartományok metszetének részhalmaza) egyenletesen konvergens és összegfüggvénye ott s , ha $\forall \epsilon \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall x \forall n \geq N_0 : |s(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x)| < \epsilon$.
- Definiálja a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineáris függetlenségének fogalmát.
Megoldás. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.
- Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
Megoldás. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.
- Adjon elégséges feltételt térbeli vektormező vektorpotenciáljának létezésére a derivált segítségével.
Megoldás. Legyen $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező. Ha D konvex (vagy csillagszerű vagy egyszeresen összefüggő) és $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, akkor létezik a D tartományon vektorpotenciál.
- Mondja ki a Stokes-tételt.
Megoldás. Legyen S irányított felület, pereme a jobbkéz-szabály szerint irányítva ∂S , és legyen $\mathbf{u}$ (legalább S egy környezetében) folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$.
- Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.
Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.
- Definiálja a lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?
Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete az $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ egyenlet. Ha ennek gyökei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, multiplicitásuk rendre $m_1, \dots, m_r$, akkor a differenciálegyenlet megoldásterének egy bázisa $e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1} e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_r x}, \dots, x^{m_r-1} e^{\lambda_r x}$.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Végezze el az $f(x) = x + 2\sqrt{1+x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, nem páros, nem páratlan, nem periodikus, zérushelye nincs, mivel $f(x) > x + 2|x| \geq |x|$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = \infty.$$

A deriváltak

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^{3/2}},$$

f' zérushelye $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, f'' sehol nem nulla. Az előjelek:

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$
f	$\cup$	min	$\cup$
f'	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$

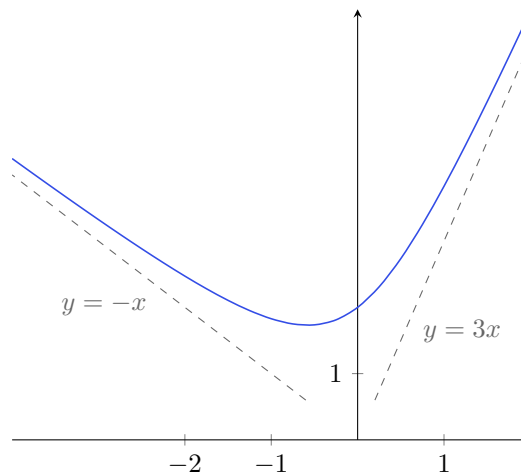
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0,$$

tehát $+\infty$ irányban $y = 3x$, $-\infty$ irányban $y = -x$ ferde aszimptota. $R_f = [\sqrt{3}, \infty)$, grafikon:



2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x^3 \ln^2 x \, dx$$

Megoldás. A primitív függvény

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln^2 x \, dx &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \int \frac{x^4}{4} 2 \ln(x) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \int \frac{x^3}{2} \ln(x) \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \left(\frac{x^4}{8} \ln x - \int \frac{x^4}{8} \frac{1}{x} \, dx \right) \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \left(\frac{x^4}{8} \ln x - \frac{x^4}{32} \right) \\ &= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32},\end{aligned}$$

az integrál

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 \ln^2 x \, dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 x^3 \ln^2 x \, dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left[\frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \sqrt{n^2 + 1} (x-1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát.

Megoldás. Az együtthatók sorozata $a_n = 2^{2n} \sqrt{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$), a konvergenciasugár

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2(n+1)} \sqrt{(n+1)^2 + 1}}{2^{2n} \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sqrt{\frac{(1 + \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}} = 4$$

alapján $R = \frac{1}{4}$. A konvergenciaintervallum $1 - \frac{1}{4}$ végpontjában a sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n^2 + 1},$$

ami divergens, a $1 + \frac{1}{4}$ végpontban

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^2 + 1},$$

ami szintén divergens. A konvergenciatartomány tehát $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$

4. Az a paraméter értékétől függően hány megoldása van a

$$\begin{aligned}-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 &= -1\end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek?

Megoldás. A kibővített mátrixot sorműveletekkel egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & a \\ 1 & a & -2 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & a \\ 1 & a & -2 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} s_2+3s_1 \\ s_3+s_1 \\ s_4-s_1 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & a-1 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{s_2 \cdot (-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & a-1 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2 \div 6} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -3 & a-1 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_3+5s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & a-1 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Ebből az alakból már leolvashatjuk, hogy az együtthatómátrix rangja a értékétől függetlenül 3. A sorműveletek után a 4×4 méretű kibővített mátrix determinánsa az első oszlop majd az utolsó sor szerinti kifejtéssel

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 13 & a-1 \\ 0 & 0 & 62 & 6a-6 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & a-1 \\ 0 & 62 & 6a-6 \\ a+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 13 & a-1 \\ 62 & 6a-6 \end{vmatrix} \\ = (a+2)(a-1) \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 62 & 6 \end{vmatrix} = 16(a+2)(a-1)$$

gyökei 1 és -2 . Ha $a = 1$ vagy $a = -2$, akkor az együtthatómátrix rangja, a kibővített mátrix rangja és az ismeretlenek száma egyaránt 3, tehát pontosan egy megoldás létezik. Ha viszont $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, akkor a kibővített mátrix rangja nagyobb mint az együtthatómátrix rangja, így az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.

5. Határozza meg a $0 \leq z \leq 1 - x^2 + y^2$, $x \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott alakzat tömegközéppontját.

Megoldás. Hengerkoordinátákat használunk: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, a paramétertartomány $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - r^2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, a Jacobi-determináns r . A szükséges integrálok

$$\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} r \, dz \, d\phi \, dr = \pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = \frac{\pi}{4} \\ \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} r \cos(\phi) r \, dz \, d\phi \, dr = [\sin \phi]_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^4) \, dr = \frac{4}{15} \\ \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} r \sin(\phi) r \, dz \, d\phi \, dr = 0 \\ \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{1-r^2} zr \, dz \, d\phi \, dr = \pi \int_0^1 r \frac{(1-r^2)^2}{2} \, dr = \frac{\pi}{12},$$

a tömegközéppont helye $(\frac{16}{15\pi}, 0, \frac{1}{3})$.

6. Oldja meg az $\sqrt{1+x^2}y' = (1+x)\cos^2 y$ differenciálegyenletet $y(0) = -\frac{\pi}{4}$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

mindkét oldalt integrálva

$$\tan y(x) = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \right) dx = \operatorname{arsinh} x + \sqrt{1+x^2} + C$$

adódik, azaz $y(x) = \arctan(\operatorname{arsinh} x + \sqrt{1+x^2} + C)$. A kezdeti feltételből

$$C = \tan y(0) - \operatorname{arsinh} 0 - \sqrt{1+0^2} = -1 - 1 = -2.$$

7. Oldja meg a $4x^3 - 6xy + (-3x^2 + 2y)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú, $P(x, y) = 4x^3 - 6xy$, $Q(x, y) = -3x^2 + 2y$,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -6x = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},$$

tehát egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$u(x, y) = \int_0^x P(\xi, 0) \, d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) \, d\eta = \int_0^x 4\xi^3 \, d\xi + \int_0^y (-3x^2 + 2\eta) \, d\eta = x^4 - 3x^2y + y^2,$$

az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, explicit alakban

$$y(x) = \frac{3}{2}x^2 \pm \frac{\sqrt{5x^4 + 4C}}{2},$$

a kezdeti feltétel alapján $C = 5$ és a két előjel közül a negatív adja a megfelelő ágot.