

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Fejezze ki az $a + bi$ komplex szám trigonometrikus alakját a és b segítségével, ha $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Megoldás. $r(\cos \varphi + i\varphi)$, ahol $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a}$.

2. Mondja ki a Bolzano-tételt.

Megoldás. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $y \in [f(a), f(b)]$ -hez létezik $x \in [a, b]$, amire $f(x) = y$.

3. Hogyan jellemezhető egy egyszer differenciálható függvény konvexitása az első derivált segítségével?

Megoldás. Egy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton nő.

4. Mit értünk egy hatványsor konvergenciasugara alatt? Adjon példát olyan hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara 1 és az $x = 1$ és $x = 3$ pontokban is konvergens.

Megoldás. Egy x_0 középpontú hatványsor konvergenciasugara R , ha $|x - x_0| < R$ esetén konvergens, $|x - x_0| > R$ esetén divergens. A feltétel szerinti hatványsornak csak $x_0 = 2$ lehet a középpontja, és ilyen létezik is, pl. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x - 2)^n$

5. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.

Megoldás. Akkor létezik megoldás, ha az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja megegyezik. A megoldás akkor egyértelmű, ha ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával.

6. Adjon elégséges feltételt arra, hogy az $f(x, y)$ kétszer differenciálható kétváltozós függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke legyen.

Megoldás. Ha $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ és $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, akkor az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőérték van.

7. Hogyan lehet kiszámítani az $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható függvénnyel megadott térgörbe ívhosszát?

Megoldás. $\int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$.

8. Mondja ki a vonalmenti integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tételt.

Megoldás. Ha $\mathbf{v}$ (skalár-)potenciálos vektormező, egy potenciálja u , és $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ térgörbe, akkor $\mathbf{v}$ integrálja a görbe mentén $u(\mathbf{r}(b)) - u(\mathbf{r}(a))$.

9. Mondja ki a Cauchy–Peano-féle egzisztenciátételt.

Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása.

10. Mit értünk egzakt differenciálegyenlet alatt?

Megoldás. Egy $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ -en, ha létezik $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$ teljesül. (Lokálisan ezzel ekvivalens: $P'_y = Q'_x$.)

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$$

$$b_n = \left(\frac{3n+6}{3n+2} \right)^{5n-7}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+6}{3n+2} \right)^{5n-7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{3n+2} \right)^{3n+2} \right]^{\frac{5n-7}{3n+2}} = e^{4 \cdot \frac{5}{3}} = e^{\frac{20}{3}} \end{aligned}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx$$

Megoldás. $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{t^3}{t^2 + 1} \frac{1}{t} dt \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= t - \arctan t \\ &= e^x - \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

3. Határozza meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ sor összegét.

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} &= \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) x^{n-1}, \end{aligned}$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) x^n = x \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

A keresett numerikus sor $x = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 8.$$

4. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - |x| & \text{ha } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \text{ vagy } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

függvény 2π szerint periodikus kiterjesztésének Fourier-sorát.

Megoldás. f páros, emiatt a $\sin(nx)$ tagok eltűnnek. A megmaradó együtthatókat a következő integrálokból kapjuk:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (-1) \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } n \text{ osztható 4-gyel} \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

A Fourier-sor tehát

$$\frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k+1)^2} \cos(4k+1)x + \frac{2}{(4k+2)^2} \cos(4k+2)x + \frac{1}{(4k+3)^2} \cos(4k+3)x \right).$$

5. Hol van a tömegközéppontja az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület $x \geq 0, y \geq 0$ egyenlőtlenségek által kijelölt darabjának?

Megoldás. Az alakzat egy gömbfelület darabja, a szokásos paraméterezés $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}$, a paramétertartomány $\vartheta \in [0, \pi], \varphi \in [0, \pi/2]$, a normálvektor abszolútértéke

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = |(\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \vartheta \mathbf{k}) \times (-\sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j})| = |\sin(\vartheta) \mathbf{r}(\vartheta, \varphi)| = \sin \vartheta.$$

A szükséges integrálok

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta = \pi \\ \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cos \varphi d\varphi d\vartheta &= \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \sin \varphi d\varphi d\vartheta &= \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\varphi d\vartheta &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\vartheta}{2} d\vartheta = 0, \end{aligned}$$

a tömegközéppont helye $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

6. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú 2 sugarú gömbfelületen kifelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. A vektormezőt zárt felületen integráljuk, alkalmazhatjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + x^2 = 4x^2 + 2xy,$$

gömbi koordinátákat használunk: $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \vartheta \mathbf{k}$, a paramétertartomány $r \in [0, 2]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, a Jacobi-determináns $r^2 \sin \vartheta$. Az integrál

$$\begin{aligned} \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV \\ &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (4r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + 2r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi) r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= 4 \int_0^2 r^4 \, dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= 4 \frac{2^5}{5} \int_0^\pi (\sin \vartheta - \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) \, d\vartheta \\ &= \frac{128\pi}{5} \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi \\ &= \frac{128\pi}{5} \frac{4}{3} = \frac{512\pi}{15}. \end{aligned}$$

7. Határozza meg az $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén állandó együtthatós lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$, tehát a gyökök -3 és -1 . A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-3x} + Be^{-x}$.

Az inhomogén tag polinomszor exponenciális, külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük $y(x) = Cxe^{-3x}$ alakban. A deriváltak

$$\begin{aligned} y'(x) &= Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x} \\ y''(x) &= -6Ce^{-3x} + 9Cxe^{-3x}, \end{aligned}$$

az egyenletbe behelyettesítve

$$-6Ce^{-3x} + 9Cxe^{-3x} + 4(Ce^{-3x} - 3Cxe^{-3x}) + 3Cxe^{-3x} = -2Ce^{-3x} = e^{-3x}$$

adódik. Ez akkor teljesül minden x -re, ha $C = -\frac{1}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{2}xe^{-3x} + Ae^{-3x} + Be^{-x} \\ y'(x) &= -\frac{1}{2}e^{-3x} + \frac{3}{2}xe^{-3x} - 3Ae^{-3x} - Be^{-x}, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = -\frac{1}{2} - 3A - B. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $A = -\frac{3}{4}$, $B = \frac{7}{4}$, a keresett megoldás $y(x) = -\frac{1}{2}xe^{-3x} - \frac{3}{4}e^{-3x} + \frac{7}{4}e^{-x}$.