Matematika G3 első ZH

Energetika és Mechatronika BSc szakok 2019. március 25.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (5p) Definiálja egy $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe ívhosszát.

   Megoldás. A görbe $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$ felosztásához tartozó töröttvonal ívhossza $\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})|$. A görbe ívhossza az összes felosztáshoz tartozó töröttvonalak ívhosszainak szuprémuma.

2. (5p) Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

   Megoldás. Legyen V korlátos tartomány, amelyet a ∂V zárt, kifelé irányított felület határol, és legyen $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor $\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, \mathrm{d}V$

3. (8p) Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ vektormezőt az AB szakaszon az A ponttól a B pont felé irányítva, ha $A = (-1, 2, 3)$ és $B = (2, -2, 9)$.

   Megoldás. Az egyenes egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = (-1 + 3t)\mathbf{i} + (2 - 4t)\mathbf{j} + (3 + 6t)\mathbf{k}$, a szakasznak megfelelő paramétertartomány $[0, 1]$. A derivált és a vektormező értéke a görbén

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) &= (-1 + 3t)^2\mathbf{i} + (2 - 4t)(3 + 6t)\mathbf{j} - (-1 + 3t)(2 - 4t)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

   tehát az integrál

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big[3(-1 + 3t)^2 - 4(2 - 4t)(3 + 6t) - 6(-1 + 3t)(2 - 4t)\Big] \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (195t^2 - 78t - 9) \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[65t^3 - 39t^2 - 9t\Big]_0^1 = 17. \end{aligned}$$

4. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ paraméterezett felület $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 4\pi]$ paraméterértékeknek megfelelő darabjának felszínét

   Megoldás. A parciális deriváltak vektoriális szorzatának abszolútértéke

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| &= |(\cos v\mathbf{i} + \sin v\mathbf{j}) \times (-u \sin v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j}, \mathbf{k})| \\ &= \Big|\sin v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + (u \cos^2 v + u \sin^2 v)\mathbf{k}\Big| \\ &= \sqrt{\sin^2 v + (-\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{1 + u^2}. \end{aligned}$$

A felszín ennek integrálja a paramétertartományon:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_0^{4\pi} \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 1} \frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\pi \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sinh 2t\right]_0^{\operatorname{arsinh} 1} = 2\pi(\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}),
\end{aligned}$$

a második lépésben $u = \sinh t$, $\mathrm{d}u = \cosh t\,\mathrm{d}t$ helyettesítést használva.

5. (8p) Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = x^2(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ vektormezőt az $x^2+y^2+z^2=4$ felület $z \geq 0$ darabján kifelé (az origótól távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

   Megoldás. A megadott felület egy origó középpontú gömbfelület darabja, a gömbfelület szokásos paraméterezése $\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = 2\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + 2\sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + 2\cos\vartheta\mathbf{k}$, a kifelé mutató normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 4\sin\vartheta(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

   a paramétertartomány $[0,\pi/2]\times[0,2\pi]$. A keresett integrál

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 8\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\cdot 4\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 32\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 32\pi\int_0^{\pi/2}(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 32\pi\left[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{64}{3}\pi.
\end{aligned}$$

6. (8p) Hol van a tömegközéppontja annak a homogén tömegeloszlású testnek, amely az $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1-x$ egyenlőtlenségek által meghatározott térrészt tölti ki?

   Megoldás. Használjunk hengerkoordinátákat: $\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, az alakzatnak megfelelő paramétertartományt a $0\leq\rho\leq 1$, $0\leq\phi\leq 2\pi$, $0\leq z\leq 1-\rho\cos\phi$ egyenlőtlenségek adják, a Jacobi-determináns ρ. A tömegközéppont koordinátái az elsőrendű nyomatékok elosztva a térfogattal. A szükséges integrálok:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\rho\cos\phi}\rho\cos\phi\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho\cos\phi)\rho\cos\phi\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\
&= \pi\int_0^1(-\rho^3)\,\mathrm{d}\rho = -\frac{\pi}{4} \\
\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\rho\cos\phi}\rho\sin\phi\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho\sin\phi)\rho\cos\phi\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = 0 \\
\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\rho\cos\phi} z\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\rho\cos\phi)^2\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho \\
&= \pi\int_0^1\frac{1}{2}(2+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{5}{8}\pi \\
\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\rho\cos\phi}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho &= \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho\cos\phi)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho = \pi,
\end{aligned}$$

   tehát a tömegközéppont az $(-\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{8})$ pont.

7. (8p) Határozza meg az $\mathbf{u}(x,y,z) = (3x^4y + 2x^2y^3)\mathbf{i} - 3y^4x\mathbf{j} + xyz^3\mathbf{k}$ vektormező integrálját az origó középpontú, $z = 0$ síkban fekvő $R = 3$ sugarú körvonalon a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív irányítás szerint.

   Megoldás. Használhatjuk a Stokes-tételt, ami szerint a keresett integrál egyenlő rot $\mathbf{u}$ felületi integráljával az origó középpontú, $z = 0$ síkban fekvő $R = 3$ sugarú körlapon felfelé mutató irányítás mellett. Mivel a normálvektor a z tengellyel párhuzamos, elég a rotáció utolsó komponensét kiszámolni:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z))_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -3y^4 - 3x^4 - 6x^2y^2 = -3(x^2+y^2)^2.$$

   A körlap egy paraméterezése $\mathbf{r}(r,\varphi) = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j}$ ($r \in [0,R]$, $\varphi \in [0,2\pi]$), a normálvektor

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = (\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}) \times (-r\sin\varphi\mathbf{i} + r\cos\varphi\mathbf{j}) = r\mathbf{k},$$

   tehát az integrál

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_0^R\int_0^{2\pi}(-3r^5)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= -6\pi\int_0^R r^5\,\mathrm{d}r = -\pi R^6 = -3^6\pi = -729\pi.\end{aligned}$$