Matematika A3 első ZH — B csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. október 25.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r}:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ függvény folytonosan differenciálható, akkor rektifikálható is.
   b) Bármely vektormező rotációjának divergenciája 0.
   c) Ha egy vektormező skalárpotenciálos, akkor bármely zárt irányított felületen 0 az integrálja.

   Megoldás. a) Igaz. Mivel $\mathbf{r}$ korlátos zárt intervallumon folytonosan differenciálható, a derivált korlátos. Láttuk, hogy ha egy függvény differenciálható és a derivált korlátos, akkor a függvény Lipschitz-folytonos. Végül azt is láttuk, hogy korlátos intervallumon értelmezett Lipschitz-folytonos paraméterezés rektifikálható görbét határoz meg.
   b) Igaz. Ez a Young-tételen múlik, hiszen a rotáció számolásánál pl. az utolsó komponens x illetve y szerinti deriváltja kerül a második illetve első komponensbe, méghozzá különböző előjellel, tehát a divergenciában, ahol most y illetve x szerint deriválunk újra, kiejtik egymást.
   c) Hamis. Ha létezik skalárpotenciál, akkor zárt görbéken lesz 0 az integrál. (Zárt felületeken akkor lenne 0, ha vektorpotenciál létezését tennénk fel.)

2. (4p) Bizonyítsa be az alábbi parciálási integrálási szabályt:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{grad}(g)\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b))g(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))g(\mathbf{r}(a)) - \int_\gamma g\,\mathrm{grad}(f)\cdot d\mathbf{r},$$

   ahol $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ a γ görbe egy folytonosan differenciálható paraméterezése, f és g pedig skalármezők.

   Megoldás. Az egyik Leibniz-szabályból indulunk ki:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(fg) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\mathbf{k}\\ &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right) g\\ &= f\,\mathrm{grad}(g) + \mathrm{grad}(f)g.\end{aligned}$$

   A Newton-Leibniz-tétel és az integrál linearitása alapján az előző azonosság felhasználásával

$$f(\mathbf{r}(b))g(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))g(\mathbf{r}(a)) = \int_\gamma \mathrm{grad}(fg)\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathrm{grad}(f)g\cdot d\mathbf{r} + \int_\gamma f\,\mathrm{grad}(g)\cdot d\mathbf{r}$$

   adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség átrendezése.

3. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = (-3x^2z - 2xz^3 + 2y^2z^3)\mathbf{i} + (4xyz^3)\mathbf{j} + (-x^3 - 3x^2z^2 + 6xy^2z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = \left(2 + t^2 - t - \frac{2}{1+t}\right)\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t} - 2t^3}{1 - t(1-t)}\mathbf{j} + (\cos(\pi t) - 1)\,\mathbf{k}$$

   görbe mentén a $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek közötti darabon.

   Megoldás. A vektormező az egész téren értelmes és folytonosan differenciálható,

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\\ &= \left(12xyz^2 - 12xyz^2\right)\mathbf{i} + \left((-3x^2 - 6xz^2 + 6y^2z^2) - (-3x^2 - 6xz^2 + 6y^2z^2)\right)\mathbf{j}\\ &\quad + \left(4yz^3 - 4yz^3\right)\mathbf{k} = 0,\end{aligned}$$

tehát létezik (skalár)potenciálja. Egy potenciál:

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi \\ &= (-x^3z - x^2z^3 + 2xy^2z^3) + 0 + 0 = -x^3z - x^2z^3 + 2xy^2z^3.\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz-tétel alapján az integrál kiszámításához a görbe végpontjain kell a potenciált kiértékelni:

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} &\qquad f(1,-1,-2) &= -6 \\ &\mathbf{r}(0) = 0 &\qquad f(0,0,0) &= 0,\end{aligned}$$

tehát az integrál értéke $-6 - 0 = -6$.

4. (8p) Hol van a tömegközéppontja annak a vékony, homogén tömegeloszlású drótnak, amelynek alakját a $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cosh t\mathbf{k}$ görbe $-\pi \le t \le \pi$ darabja írja le.

Megoldás.

$$\begin{aligned}|\dot{\mathbf{r}}(t)| &= |-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sinh t\mathbf{k}| \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sinh^2 t} \\ &= \sqrt{\cosh^2 t} \\ &= \cosh t.\end{aligned}$$

A tömegközéppont koordinátáinak meghatározásához a koordinátafüggvények görbementi integráljait kell elosztani az ívhosszal. A második koordinátánál az integrandus páratlan, tehát az integrál 0. Marad három integrál:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t\,\mathrm{d}t &= [\sinh t]_{-\pi}^{\pi} = 2\sinh\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\cosh t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin t\cosh t + \frac{1}{2}\cos t\sinh t\right]_{-\pi}^{\pi} = -\sinh\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2t\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi + \frac{1}{2}\sinh 2\pi,\end{aligned}$$

tehát a tömegközéppont helye:

$$-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\pi + \frac{1}{2}\sinh 2\pi}{2\sinh\pi}\mathbf{k}.$$

5. (8p) Mekkora a felszíne az $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$ felület $1 \le u^2 + v^2 \le 4$, $v > 0$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?

Megoldás.

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| = |(\mathbf{i} + v\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + u\mathbf{k})| = |-v\mathbf{i} - u\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}.$$

A felszín számításakor kapott kettős integrálban érdemes polárkoordinátákra áttérni: $u = r\cos\phi$, $v = r\sin\phi$, ezzel

$$\begin{aligned}A &= \iint_{\substack{1 \le u^2+v^2 \le 4 \\ v>0}} \sqrt{1 + u^2 + v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_1^2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + r^2}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\ &= \pi\left[\frac{(1 + r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

6. (8p) Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektormezőt az origó középpontú, $z = 0$ síkba eső R sugarú középkörű, r sugarú kör keresztmetszetű tóruszfelület $x \geq 0$ darabján kifelé (a középkörtől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

Megoldás. Használjuk a tóruszfelület szokásos paraméterezését:

$$\mathbf{r}(\vartheta,\varphi) = (R + r\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i} + (R + r\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\vartheta\mathbf{k},$$

a megadott darabnak megfelelő paramétertartomány $(\vartheta,\varphi) \in [0,2\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$. Ekkor a parciális deriváltak vektoriális szorzata

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= (r\cos\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + r\cos\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} - r\sin\vartheta\mathbf{k}) \\ &\quad\times (-(R + r\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{i} + (R + r\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{j}) \\ &= r(R + r\sin\vartheta)(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}).\end{aligned}$$

A vektormező a felületen kiértékelve

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi)) = (R + r\sin\vartheta)\cos\varphi\mathbf{i} + (R + r\sin\vartheta)\sin\varphi\mathbf{j},$$

tehát az integrál

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{r}(\vartheta,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r(R + r\sin\vartheta)^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= r\pi\int_0^{2\pi}\left(R^2\sin\vartheta + 2Rr\sin^2\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\right) = 2\pi^2Rr^2.\end{aligned}$$

7. (8p) Gauss-tétel segítségével számítsa ki a $\mathbf{v}(x,y,z) = x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ egyenletű felületen befelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. A megadott S irányított felület megfordított irányítással az origó középpontú $R = 3$ sugarú tömör G gömb pereme, tehát használható a Gauss-tétel. Ehhez $\mathbf{v}$ divergenciáját kell ismerni:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Használjunk gömbi koordinátákat:

$$\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi) = r(\sin\vartheta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\vartheta\mathbf{k}),$$

a paramétertartomány $(r,\vartheta,\varphi) = [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$, a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$. Az integrandus $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}(r,\vartheta,\varphi)) = 3r^2$. Tehát a keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= -\int_{\partial G}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} \\ &= -\int_G \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V \\ &= -\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 3r^2\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\ &= -6\pi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= -\frac{12\pi}{5}R^5 = -\frac{2916\pi}{5}.\end{aligned}$$