Matematika A3 második ZH — B csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok — 2016. november 22.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelmű a lokális megoldása.

   b) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analitikus, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai analitikusak.

   c) Egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet két megoldásának különbsége a hozzá tartozó homogén egyenletnek megoldása.

   Megoldás.

   a) Hamis. A jobboldal folytonosságából csak a megoldás létezése következik, az egyértelműség nem. Például az $y' = 2\sqrt{|y|}$ egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van, ami az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégíti.

   b) Igaz. Ezt használjuk fel akkor, amikor a megoldást hatványsor alakban keressük.

   c) Igaz. Ez az alapja annak, hogy az inhomogén lineáris egyenleteket úgy oldjuk meg, hogy megkeressük a homogén egyenlet általános megoldását és az inhomogén egyenletnek egy megoldását. A kettő összege az inhomogén egyenlet általános megoldása.

2. (4p) Bizonyítsa be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos, akkor az $y' = f(y)$ differenciálegyenletnek minden (nyílt intervallumon értelmezett) megoldása vagy szigorúan monoton az egész értelmezési tartományán vagy konstans.

   Megoldás. Tegyük fel, hogy az $y(x)$ megoldás nem szigorúan monoton. Mivel $y(x)$ folytonosan differenciálható, ebből következik, hogy léteznek olyan x_1, x_2 pontok, amire $y'(x_1)$ és $y'(x_2)$ különböző előjelű, és így a kettő között egy olyan x_0 pont, ahol $y'(x_0) = 0$ (Bolzano-tétel). Legyen $y_0 = y(x_0)$. Ekkor az $y(x) = y_0$ konstans függvény megoldja a differenciálegyenletet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel mellett, tehát a Picard-Lindelöf-tétel szerint megegyezik az $y(x)$ megoldással.

3. (8p) Határozza meg az $y' = -2xy$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott függvénysorozatot. Mi a függvénysorozat limesze?

   Megoldás. A függvénysorozat nulladik tagja $\varphi_0(x) = 1$, a további tagokat a

   $$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (-2)\xi\varphi_k(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

   rekurzió definiálja. Az első néhány tag

   $$\begin{aligned}
   \varphi_1(x) &= 1 - x^2\\
   \varphi_2(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\\
   \varphi_3(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\\
   \varphi_4(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24},
   \end{aligned}$$

   ebből sejthetjük, hogy

   $$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy valóban ez a függvénysorozat:

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(x) &= 1+\int_0^x(-2)\xi\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{\xi^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}\xi\\ &= 1+\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\int_0^x\xi^{2n+1}\,\mathrm{d}\xi\\ &= 1+\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\\ &= 1+\sum_{n=0}^{k}(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{k+1}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.\end{aligned}$$

A függvények e^{-x^2} 0 körüli Taylor-sorának a részletösszegei, a határérték e^{-x^2}. (A Picard-Lindelöf-tétel bizonyításánál elhangzottakból is következik, hogy a sorozat az egyértelmű lokális megoldáshoz konvergál $x=0$ közelében.)

4. (8p) Oldja meg az $y''=y'\left(\frac{2x}{1+x^2}+\tanh x\right)$ differenciálegyenletet $y(0)=0$, $y'(0)=1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenletben nem szerepel y, tehát $v=y'$ helyettesítéssel eggyel kisebb rendű differenciálegyenlethet jutunk. Az így kapott egyenlet szétválasztható:

   $$\frac{v'}{v}=\frac{2x}{1+x^2}+\tanh x.$$

   Integráljuk mindkét oldalt 0-től x-ig (a változót előzetesen pl. ξ-re cserélve):

   $$\ln\frac{v(x)}{v(0)}=\int_0^x\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}+\tanh\xi\right)\mathrm{d}\xi=\ln(1+x^2)+\ln\cosh x,$$

   tehát $v(0)=y'(0)=1$ figyelembevételével $y'(x)=v(x)=(1+x^2)\cosh x$. Az eredeti egyenlet megoldását ennek integrálásával kapjuk:

   $$y(x)=y(0)+\int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi=-2x\cosh(x)+3\sinh(x)+x^2\sinh x.$$

5. (8p) Oldja meg az $y+(ye^x-1)y'=0$ differenciálegyenletet $y(0)=-2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ alakú, ahol $P(x,y)=y$ és $Q(x,y)=ye^x-1$. Nem egzakt, viszont létezik csak x-tól függő multiplikátor:

   $$\ln|M(x)|=\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-ye^x}{ye^x-1}\,\mathrm{d}y=\int(-1)\,\mathrm{d}y=-x,$$

   tehát $M(x)=e^{-x}$. Eszerint az $ye^{-x}+(y-e^{-x})y'=0$ egyenlet már egzakt. Egy potenciál

   $$u(x,y)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi+\int_0^y\left(\eta-e^{-x}\right)\mathrm{d}\eta=\frac{y^2}{2}-ye^{-x}.$$

   Az általános megoldás implicit alakban $u(x,y(x))=C$, ahol C paraméter (ebből $y(x)$ kifejezhető). A kezdeti feltétel alapján $C=u(0,y(0))=u(0,-2)=4$.

6. (8p) Az

$$y_1' = y_1 \cos(y_2)$$
$$y_2' = -y_2 \sin(y_1) - y_1$$

differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = (0,0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbf{y}(x) = (0,0)$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.

Megoldás. A deriváltmátrix kielégíti a $D' = A(x)D$ differenciálegyenletet és a $D(0) = I$ kezdeti feltételt, ahol $A(x)$ az egyenletek jobb oldalainak y_1 illetve y_2 szerinti deriváltjait tartalmazza a megadott megoldás mentén:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ -1 + y_2 \cos y_1 & -\sin y_1 \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$D(x)$ oszlopai ugyanannak a lineáris egyenletrendszernek megoldásai, de különböző kezdeti feltétellel, tehát érdemes az általános megoldást megkeresni. Az egyenletrendszer

$$D_{1i}' = D_{1i}$$
$$D_{2i}' = -D_{1i},$$

az első egyenlet általános megoldása $D_{1i}(x) = C_1 e^x$, ezt a másodikba írva

$$D_{2i}' = -C_1 e^x$$

adódik, ebből integrálással $D_{2i}(x) = -C_1 e^x + C_2$.
Eddig azt láttuk be, hogy $(D_{1i}(x), D_{2i}(x)) = (C_1 e^x, -C_1 e^x + C_2)$, ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. A kezdeti feltétel alapján az $i = 1$ komponenseknél $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, míg az $i = 2$ komponenseknél $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Behelyettesítve kapjuk a deriváltmátrixot:

$$D(x) = \begin{bmatrix} D_{11}(x) & D_{12}(x) \\ D_{21}(x) & D_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 1 - e^x & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (8p) Oldja meg az $y' + y \tanh x = 1$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris, először a homogén egyenletet oldjuk meg. Ez szétválasztható:

$$y(x) = e^{-\int \tanh x \, \mathrm{d}x} = Ce^{-\ln \cosh x} = C\frac{1}{\cosh x}.$$

Az inhomogén egyenlet megoldása az állandók variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)\frac{1}{\cosh x}$, ahol $c'(x) = \cosh x$, tehát $c(x) = C + \sinh x$. Így az általános megoldás $y(x) = \tanh x + C\frac{1}{\cosh x}$. A kezdeti feltétel alapján $C = y(0) = 1$.