Matematika A3 második ZH

B csoport

Energetika és Mechatronika BSc szakok

2016. november 22.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

Gyakorlat:

Név:

Neptun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Σ

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor az $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték-problémának bármely $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén egyértelmű a lokális megoldása.
   b) Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analitikus, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai analitikusak.
   c) Egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet két megoldásának különbsége a hozzá tartozó homogén egyenletnek megoldása.
2. (4p) Bizonyítsa be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos, akkor az $y' = f(y)$ differenciálegyenletnek minden (nyílt intervallumon értelmezett) megoldása vagy szigorúan monoton az egész értelmezési tartományán vagy konstans.
3. (8p) Határozza meg az $y' = -2xy$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott függvénysorozatot. Mi a függvénysorozat limesze?
4. (8p) Oldja meg az $y'' = y'\left(\frac{2x}{1+x^2} + \tanh x\right)$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
5. (8p) Oldja meg az $y + (ye^x - 1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -2$ kezdeti feltétel mellett.
6. (8p) Az

   $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \cos(y_2) \\ y_2' &= -y_2 \sin(y_1) - y_1 \end{aligned}$$

   differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{y}(0) = (0, 0)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $\mathbf{y}(x) = (0, 0)$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.
7. (8p) Oldja meg az $y' + y \tanh x = 1$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.