Matematika G3 második ZH

Energetika és Mechatronika BSc szakok 2019. május 6.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (5p) Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Ha $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változóban Lipschitz-folytonos, akkor az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenletnek bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik az $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő lokális megoldása, és az egyértelmű.

2. (5p) Definiálja az egzakt differenciálegyenlet fogalmát.

   Megoldás. Egy $P(x, y)+Q(x, y)y' = 0$ alakú differenciálegyenlet egzakt a $D \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazon, ha létezik $u : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amire $P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ és $Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ teljesül.

3. (8p) Oldja meg az $y'' = -xy'^2$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. Az egyenlet az $u := y'$ függvényre nézve elsőrendű, szétválasztható:

$$\frac{u'}{u^2} = -x.$$

   Integráljuk mindkét oldalt:

$$-\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{u(0)} = \int_0^x \frac{u'(\xi)}{u(\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x (-\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{x^2}{2},$$

   ebből az $u(0) = y'(0) = 2$ kezdeti feltételt figyelembe véve $u(x) = \frac{2}{1+x^2}$ adódik. y ebből integrálással határozható meg:

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{2}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 2\arctan x.$$

4. (8p) Oldja meg a $2xy + 2y^2 + (x^2 + 4xy)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(1) = -1$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás.

$$\frac{\partial(2xy + 2y^2)}{\partial y} = 2x + 4y = \frac{\partial(x^2 + 4xy)}{\partial x},$$

   így az egyenlet egzakt. Egy potenciálfüggvény

$$u(x, y) = \int_0^x (2x \cdot 0 + 2 \cdot 0^2)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y (x^2 + 4x\eta)\,\mathrm{d}\eta = x^2y + 2xy^2,$$

   így az általános megoldás implicit alakja $x^2y(x) + 2xy(x)^2 = C$. A kezdeti feltétel alapján $C = 1^2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 = 1$.

5. (8p) Sorfejtés segítségével oldja meg a $(2x^2 - 1)y'' - 4xy' + 4y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

   Megoldás. A megoldást

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

alakban keressük, a hatványsort tagonként deriválva behelyettesítjük az egyenletbe:

$$\begin{aligned}
0 &= (2x^2-1)y'' - 4xy' + 4y \\
&= (2x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n n(n-1)x^n - \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2a_n n(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) - 4a_n n + 4a_n\right) x^n.
\end{aligned}$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha a hatványsor együtthatói mind eltűnnek, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+2} = \frac{2n(n-1) - 4n + 4}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

A kezdeti feltétel alapján $1 = y(0) = a_0$ és $0 = y'(0) = a_1$, a rekurzió alapján a páratlan indexű együtthatók nullák, a párosak pedig

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{4}{2}a_0 = 2 \\
a_4 &= \frac{4-8+4}{4\cdot 3}a_2 = 0,
\end{aligned}$$

ezután pedig szintén nullák. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = 1 + x^2$.

6. (8p) Oldja meg az $y'''' - 8y'' + 16y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 4$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet homogén lineáris állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2-4)^2 = (\lambda+2)^2(\lambda-2)^2$, tehát a ± 2 kétszeres gyök (belső rezonancia). A homogén egyenlet általános megoldása tehát $y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + Ce^{2x} + Dxe^{2x}$. A deriváltak

$$\begin{aligned}
y'(x) &= -2Ae^{-2x} + B(1-2x)e^{-2x} + 2Ce^{2x} + D(1+2x)e^{2x} \\
y''(x) &= 4Ae^{-2x} + B(-4+4x)e^{-2x} + 4Ce^{2x} + D(4+4x)e^{2x} \\
y'''(x) &= -8Ae^{-2x} + B(12-8x)e^{-2x} + 8Ce^{2x} + D(12+8x)e^{2x},
\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}
0 &= y(0) = A + C \\
3 &= y'(0) = -2A + B + 2C + D \\
0 &= y''(0) = 4A - 4B + 4C + 4D \\
4 &= y'''(0) = -8A + 12B + 8C + 12D.
\end{aligned}$$

Az első egyenletből $C = -A$, ezt a harmadikba írva $D = B$ adódik. Ezzel a maradék két egyenlet

$$\begin{aligned}
3 &= y'(0) = -4A + 2B \\
4 &= y'''(0) = -16A + 24B,
\end{aligned}$$

aminek a megoldása $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$. A keresett megoldás így $y(x) = -e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x}$.

7. (8p) Határozza meg az $f(x) = e^{-x} \sin^2 x$ függvény Laplace-transzformáltját.

Megoldás. Ha $g(x) = \sin^2 x$, akkor $f(x) = e^{-x} g(x)$, így a Laplace-transzformáció tulajdonsága alapján $(\mathcal{L}f)(z) = (\mathcal{L}g)(z+1)$. A linearizáló formula alapján

$$g(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

A Laplace-transzformáció lineáris, emiatt elég az 1 és $\cos 2x$ Laplace-transzformáltját megkeresni (pl. táblázatból):

$$(\mathcal{L}g)(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2 + 2^2},$$

tehát

$$(\mathcal{L}f)(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z+1}{(z+1)^2 + 2^2}.$$