A klasszikus mechanika matematikai módszerei (házi feladatok)

2020. május 10.

1. Newton-egyenlet

1.1. Feladat (5p)**.** Legyen $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ minden pontban pozitív definit, $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges sima függvény. Mutassuk meg, hogy az $M(x)\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$ differenciálegyenletnek tetszőleges kezdeti feltétel mellett létezik egyértelmű lokális megoldása.

1.2. Feladat (5p)**.** Legyen M és Ω egy-egy $n \times n$ méretű pozitív definit mátrix, $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $U(x) = \frac{1}{2}\langle x, \Omega x\rangle$ függvény. Határozzuk meg az $M\ddot{x} = -\operatorname{grad} U(x)$ differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

1.3. Feladat (5p)**.** Tekintsük az

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x\\ \ddot{y} &= -y\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Térjünk át síkbeli polárkoordinátákra, azaz $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ új változókra, és írjuk fel az r, φ függvényekre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert.

2. A variációszámítás alapjai

2.1. Feladat (10p)**.** Jelölje egy $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$ függvény két komponensfüggvényét r illetve φ és tekintsük az

$$S(r, \varphi) = \int_0^1 \sqrt{\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

hatást. Határozzuk meg az Euler–Lagrange-egyenleteket és a hatás stacionárius pontjait.

2.2. Feladat (10p)**.** Legyen f sima szigorúan pozitív függvény és tekintsük a grafikon x tengely körüli megforgatásával kapott forgásfelület felületi görbéit. Paraméterezzük a görbéket a szögelfordulás szerint, azaz $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+$

$f(x(t))\cos t\mathbf{j} + f(x(t))\sin t\mathbf{k}$ alakban. Milyen differenciálegyenletet elégít ki az $x(t)$ függvény az ívhossz stacionárius pontjaiban? Határozzuk meg a megoldásokat henger- illetve kúpfelület esetén.

2.3. Feladat (10p)**.** Feltételes szélsőértékeinek keresésére használhatjuk a Lagrange-multiplikátor módszert. Ha az $S_0(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$ funkcionál stacionárius pontjait keressük és a feltétel $\int_{t_1}^{t_2} K(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = 0$ alakú, akkor a módszer szerint kereshetjük az

$$S(x, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} [L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \lambda K(t, x(t), \dot{x}(t))]\,\mathrm{d}t$$

stacionárius pontjait, ahol λ egy új valós ismeretlen.

Ezzel a módszerrel határozzuk meg, hogy milyen alakot vesz fel a két végpontján rögzített L hosszúságú, egyenletes tömegeloszlású kötél, ha a tömegközéppont y koordinátája minimális (egyensúly).

2.4. Feladat (20p)**.** Ennek a feladatnak a megoldásához számítógép szükséges. Tekintsünk N egyforma tömegű testet, amelyek egy síkban az egymás közötti gravitációs erő hatására mozognak. Jelölje az i. test helyét az idő függvényében $q_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$. A mozgásegyenlet egy megoldását N-koreográfiának nevezzük, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 2π szerint periodikus függvény, amivel

$$q_i(t) = f\left(t - \frac{i}{N} 2\pi\right)$$

teljesül. A Lagrange-függvény

$$L(q_0, \ldots, q_{N-1}, \dot{q}_0, \ldots, \dot{q}_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2}|\dot{q}_i|^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{1}{|q_i - q_j|}$$

alakú, q_i fenti alakját behelyettesítve az

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^{2\pi} L(q_0(t), \ldots, q_{N-1}(t), \dot{q}_0(t), \ldots, \dot{q}_{N-1}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= N \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}|\dot{f}(t)|^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{f(t) - f\left(t - \frac{i}{N} 2\pi\right)} \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

hatás stacionárius pontjai között kereshetünk N-koreográfiákat. $N \geq 2$ esetén mindig létezik egy triviális N-koreográfia, ahol a testek egyenletes körmozgást végeznek. Számítógép segítségével keressünk közelítőleg nemtriviális N-koreográfiákat a fenti hatás stacionárius pontjainak (például lokális minimumok) numerikus keresésével az

$$f(t) = \sum_{n=1}^{r} (A_r \cos rt + B_r \sin rt, C_r \cos rt + D_r \sin rt)$$

alakú függvények terén valamely rögzített $N \geq 3$ és (elég nagy) r esetén.

2.5. Feladat (5p)**.** Tekintsük a térben N darab $m_1, m_2, \dots, m_N$ tömegű tömegpont mozgását valamely $U : (\mathbb{R}^3)^N \to \mathbb{R}$ sima függvény által megadott potenciál alatt. Az ennek megfelelő Lagrange-függvény $L : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n \to \mathbb{R}$,

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_N, \dot{x}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\dot{x}_i\right|^2 - U(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Tegyük fel, hogy minden $x_1, \dots, x_N, y \in \mathbb{R}^3$ esetén $U(x_1, \dots, x_N) = U(x_1 + y, \dots, x_N + y)$. Mutassuk meg, hogy $\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + tv, x_2 + tv, \dots, x_N + tv)$ diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja, amelyre nézve L invariáns. Határozzuk meg a hozzá tartozó Noether-töltést.

3. Vektormezők

3.1. Feladat (10p)**.** Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és $x \in U$. Vezessük be a $C^\infty(U)$ halmazon a $\sim_x$ relációt oly módon, hogy $f \sim_x g$ pontosan akkor, ha létezik olyan V nyílt halmaz, amire $x \in V \subseteq U$ és $\forall y \in V : f(y) = g(y)$ teljesül.

a) Mutassuk meg, hogy $\sim_x$ ekvivalenciareláció. Az ebből adódó ekvivalenciaosztályokat (x-beli) csíráknak nevezzük.

b) Mutassuk meg, hogy az x-beli csírák algebrát alkotnak, amelyben az x-ben eltűnő függvények alkotják az egyetlen maximális ideált. Jelölje ezt az ideált $\mathfrak{m}$

c) Bizonyítsuk be, hogy $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ azonosítható az x pontbeli érintőtérrel.

3.2. Feladat (5p)**.** Határozzuk meg a $\mathbb{R}$ téren az $X = -x^3 \frac{\partial}{\partial x}$ vektormező folyamát. Teljes-e a vektormező?

3.3. Feladat (5p)**.** Tekintsük az $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon az $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ vektormezőt (x és y a szokásos koordinátafüggvények). Határozzuk meg X folyamát. Teljes-e a vektormező?

3.4. Feladat (5p)**.** Bizonyítsuk be, hogy a Lie-zárójel teljesíti a Jacobi-azonosságot, azaz ha $X, Y, Z \in \Gamma(TU)$ valamely $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon, akkor

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

3.5. Feladat (5p)**.** Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és tegyük fel, hogy $X, Y \in \Gamma(TU)$ olyan teljes vektormezők, amelyekre $[X, Y] = 0$ igaz. Bizonyítsuk be, hogy a két vektormező folyama kommutál, azaz ha F illetve G jelöli a folyamokat, akkor $F_t \circ G_s = G_s \circ F_t$ minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén.

3.6. Feladat (5p)**.** Mutassuk meg, hogy az $F_t(x, y) = (e^{-t}x, e^{-t}(tx - x^2 + y) + e^{-2t}x^2)$ leképezés egy vektormező folyama. Határozzuk is meg ezt a vektormezőt.

3.7. Feladat (5p)**.** Legyenek x, y, z az $\mathbb{R}^3$ szokásos koordinátafüggvényei, és tekintsük a következő vektormezőket:

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$
$$Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Számítsuk ki az ezekből képezhető összes Lie-zárójelet.

4. Differenciálformák

4.1. Feladat (5p)**.** Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 1-formák, és tekintsük a

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{d}\alpha_j$$

1-formákat, ahol $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ valós számok. Fejezzük ki a $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$ differenciálformát $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ segítségével.

4.2. Feladat (10p)**.** Végezzük el a műveleteket (x, y, z, w az $\mathbb{R}^4$ koordinátafüggvényei):

a) $(2zy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y + 5z^2\,\mathrm{d}z) \wedge (x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}z \wedge x)$

b) $(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w) \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}w)$

c) $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha$, ahol $\alpha = x\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$

d) $\mathrm{d}(e^{-(x^2+y^2)}/2)$

e) $\mathrm{d}(-y\,\mathrm{d}x)$

f) $\mathrm{d}(f(x^2 + y^2 + z^2)(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z))$

g) $\mathrm{d}\left(z^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (z^2 - 2y)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x\right)$

h) $\mathcal{L}_X(x\,\mathrm{d}x)$, ahol $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

i) $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$, ahol $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$

j) $\mathcal{L}_X((x^2 + y^2)x\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)y\,\mathrm{d}y)$, ahol $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

4.3. Feladat (5p)**.** Legyen az $U = \mathbb{R}^2$ tér két koordinátafüggvénye r és ϕ, a $V = \mathbb{R}^2$ téré pedig x és y. Legyen $f : U \to V$ az $(r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$ leképezés. Határozzuk meg az $f^*(\mathrm{d}x)$, $f^*(\mathrm{d}y)$ és $f^*(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$ differenciálformákat.

4.4. Feladat (5p)**.** Legyenek az $U = \mathbb{R}^2$ tér koordinátafüggvényei ϑ és φ, a $V = \mathbb{R}^3$ téré pedig x, y és z. Legyen $f : U \to V$ a $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ leképezés. Határozzuk meg az

$$f^*\left(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right)$$

differenciálformát.

4.5. Feladat (5p)**.** Legyenek az $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ téren a koordinátafüggvények x, y, z. Tekintsük az $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 0-formát és az

$$\Omega = \frac{x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{r}$$

2-formát. Fejezzük ki az $\Omega \wedge \mathrm{d}r$ formát a koordinátafüggvények külső deriváltjaival.

4.6. Feladat (10p)**.** Tekintsük az $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmazon az x, y koordinátafüggvényeket és a belőlük képzett $\alpha = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ differenciálformát.

a) Mutassuk meg, hogy α zárt, de nem egzakt.

b) Mutassuk meg, hogy ha β tetszőleges zárt 1-forma, akkor felírható $\beta = c\alpha + \mathrm{d}f$ alakban, ahol c egyértelműen meghatározott valós szám.

4.7. Feladat (10p)**.** Legyenek a $\mathbb{R}^3$ tér szokásos koordinátafüggvényei x, y, z és tekintsük az alábbi $* : \Gamma(\Lambda^k T^*\mathbb{R}^3) \to \Gamma(\Lambda^{3-k} T^*\mathbb{R}^3)$, $(\cdot)^\sharp : \Gamma(T^*\mathbb{R}^3) \to \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ és $(\cdot)^\flat : \Gamma(T\mathbb{R}^3) \to \Gamma(T^*\mathbb{R}^3)$ pontonként ható és lineáris (azaz $C^\infty(\mathbb{R}^3)$-lineáris) leképezéseket:

$$\begin{aligned}
*f &= f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
*(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z) &= f\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
*(f\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + h\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z \\
*(f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= f \\
(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z)^\sharp &= f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z} \\
\left(f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z}\right)^\flat &= f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

ahol $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tetszőlegesek.

Számítsuk ki az alábbiakat, ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ és $u = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$, ahol $u_x, u_y, u_z \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ és vessük össze a vektoranalízisből ismert differenciáloperátorokkal:

a) $(\mathrm{d}f)^\sharp$

b) $* \,\mathrm{d} * \mathrm{d}f$

c) $(* \,\mathrm{d}u^\flat)^\sharp$

d) $* \,\mathrm{d} * u^\flat$

e) $*\mathcal{L}_u(*1)$

5. Lagrange-rendszerek

5.1. Feladat (5p)**.** Legyenek $U = \mathbb{R}^2$ standard koordinátafüggvényei ϑ, φ, $V = \mathbb{R}^3$ standard koordinátafüggvényei x, y, z és tekintsük az utóbbin a

$g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ euklideszi metrikát. Legyen $f : U \to V$ az $f(\vartheta, \varphi) = (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R \cos\vartheta)$ kifejezéssel adott leképezés. Mely $x \in U$ pontokban injektív $T_x f$? Adjuk meg az $f^* g$ visszahúzott Riemann-metrikát ezen a részhalmazon.

5.2. Feladat (10p)**.** A differenciálformákhoz hasonlóan lehet értelmezni tetszőleges tenzormező Lie-deriváltját a Leibniz-szabály kiterjesztésével: $\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}g) = (\mathcal{L}_X \mathrm{d}f) \otimes \mathrm{d}g + \mathrm{d}f \otimes (\mathcal{L}_X \mathrm{d}g)$, stb. Azt mondjuk, hogy egy X vektormező a g Riemann-metrikára nézve Killing-mező, ha $\mathcal{L}_X g = 0$ (ez azzal ekvivalens, hogy a folyama izometriákból áll).

Legyen g Riemann-metrika a $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $X \in \Gamma(TQ)$ teljes Killing-mező. Ha X folyama F, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\varphi_t = TF_t$, ez TQ diffeomorfizmusainak egy egyparaméteres csoportja. Mutassuk meg, hogy az $L = K_g$ Lagrange-függvény φ-invariáns és határozzuk meg a hozzá tartozó Noether-töltést.

5.3. Feladat (15p)**.** Tekintsük a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}^2$ félsíkot az x, y koordinátafüggvényekkel és a $g = \frac{1}{y^2} \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$ Riemann-metrikával (a hiperbolikus sík félsík-modellje).

a) Írjuk fel a geodetikusok differenciálegyenletét.

b) Lássuk be, hogy a megoldások az y tengellyel párhuzamos egyenesek és az x tengely pontjai körüli félkörök. (Útmutatás: számítsuk ki $\frac{\dot{x}}{y^2}$ és $\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$ deriváltját.)

c) Határozzuk meg a geodetikusok paraméteres egyenletét.

5.4. Feladat (10p)**.** Legyen $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbe ($\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ komponensfüggvényekkel) és az $\mathbb{R}^3$ téren tekintsük a $g = m\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + m\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + m\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ metrikát és $V = mg_0 y$ potenciált. Írjuk fel a $\gamma^* g$ visszahúzott metrikát és a $\gamma^* V$ potenciált, határozzuk meg a Christoffel-szimbólumokat és adjuk meg az így kapott egyszerű mechanikai rendszer mozgásegyenletét. (Ezt a rendszert úgy képzelhetjük el, hogy a γ görbe által meghatározott alakú drótra kisméretű gyöngyöt fűzünk, amely súrlódás nélkül mozog a gravitáció hatására.)

6. Hamilton-rendszerek

6.1. Feladat (5p)**.** Legyen V vektortér, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ nemelfajuló alternáló bilineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy $\dim V$ páros, és létezik olyan $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ vektorokból álló bázis, amelyre $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ és $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ teljesül.

6.2. Feladat (5p)**.** Legyen V vektortér, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ nemelfajuló alternáló bilineáris leképezés. Ekkor ω azonosítható egy eltolásinvariáns (vagy konstans) szimplektikus formával. Vezessük be $w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a $\tau_{w,\alpha} : V \to V$,

$$\tau_{w,\alpha}(v) = v + \alpha \langle v, w \rangle w$$

lineáris leképezést. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $w \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\tau_{w,\alpha}(v)$ szimplektikus.

6.3. Feladat (10p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}^4$, $U = T^*Q \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ standard koordinátafüggvényei $q_0, \dots, q_3, p_0, \dots, p_3$, $\omega_0 = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$. Legyen $A \in \Gamma(T^*Q)$, $F = \mathrm{d}A$. Jelöljük F komponensfüggvényeit az alábbiak szerint:

$$F = E_1 \,\mathrm{d}q_0 \wedge \mathrm{d}q_1 + E_2 \,\mathrm{d}q_0 \wedge \mathrm{d}q_1 + E_3 \,\mathrm{d}q_0 \wedge \mathrm{d}q_3$$
$$B_1 \,\mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}q_3 + B_2 \,\mathrm{d}q_3 \wedge \mathrm{d}q_1 + B_3 \,\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2.$$

Írjuk fel a Hamilton-egyenleteket, ha a Hamilton-függvény $H(q,p) = \frac{1}{2}(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)$, a szimplektikus forma pedig $\omega_F = \omega_0 + e(\tau_Q^*)^* F$.

6.4. Feladat (10p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}$, $TQ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és q, p a szokásos koordinátafüggvények, amelyekkel a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$. Legyen a Hamilton-függvény $H(q,p) = K(p) + U(q)$ alakú. A Hamilton-egyenlet numerikus megoldására tekintsük a következő két módszert (adott $h > 0$ lépéshossz mellett):

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - U'(q_i)h \\ q_{i+1} &= q_i + K'(p_i)h \end{aligned} \qquad \text{(Euler-módszer)}$$

és

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - U'(q_i)h \\ q_{i+1} &= q_i + K'(p_{i+1})h. \end{aligned} \qquad \text{(Euler–Cromer-módszer)}$$

a) Mutassuk meg, hogy a $(q_i, p_i) \mapsto (q_{i+1}, p_{i+1})$ leképezés általában nem szimplektikus az Euler-módszer esetén, míg az Euler–Cromer-módszer alkalmazásakor szimplektikus.

b) Tekintsük a két módszerrel a kapott közelítő megoldásokat $K(p) = \frac{p^2}{2}$, $U(q) = \frac{q^2}{2}$ mellett. Vizsgáljuk meg a $H(q_i, p_i)$ sorozat aszimptotikus viselkedését (magukat a megoldásokat nem szükséges részletesen felírni).

6.5. Feladat (5p)**.** Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma, $H, f, g \in C^\infty(U)$. Bizonyítsuk be, hogy ha a f és g az X_H Hamilton-vektormezőre nézve mozgásállandó, akkor azok $\{f, g\}$ Poisson-zárójele is mozgásállandó.

6.6. Feladat (5p)**.** Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma, $X, Y \in \Gamma(TU)$ olyan vektormezők, amelyekre $\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Y\omega = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy a $H = \omega(X, Y)$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező $[X, Y]$

6.7. Feladat (10p)**.** Legyenek $U = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ koordinátafüggvényei $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$. Számítsuk ki a p_1, p_2, p_3,

$$
\begin{aligned}
L_1 &= q_2p_3 - q_3p_2\\
L_2 &= q_3p_1 - q_1p_3\\
L_3 &= q_1p_2 - q_2p_1
\end{aligned}
$$

és $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ függvények egymással vett Poisson-zárójeleit.

6.8. Feladat (10p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}_{>0}$, $U = T^*Q \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$, a standard koordinátafüggvények q, p, a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$. Tekintsük a $H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{q^2}$ Hamilton-függvényt és az $f(q,p) = \frac{pq^3}{2+p^2q^2}$ függvényt. Határozzuk meg az $\{f, H\}$ Poisson-zárójelet és ennek segítségével írjuk fel az X_H és X_f Hamilton-vektormezők folyamát.

7. Lie-csoportok és sima hatásaik

7.1. Feladat (15p)**.** Azonosítsuk SO(3) Lie-algebráját az $\mathbb{R}^3$ térrel az

$$
x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

leképezés segítségével.

a) Mutassuk meg, hogy $[\hat{x}, \hat{y}] = (x \times y)^\wedge$, ahol $\times$ a vektoriális szorzás.

b) Legyen $\hat{h} \in T_e\,\mathrm{SO}(3)$. Mutassuk meg, hogy $\exp \hat{x}$ az x vektor egyenese körüli $\|x\|$ szögű forgatás, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma.

c) Tekintsük SO(3)-nak az $\mathbb{R}^3$ sokaságon az $(A, y) \mapsto Ay$ hatását. Mutassuk meg, hogy $\hat{x}$ infinitezimális generátora $\hat{x}_{\mathbb{R}^3}(y) = x \times y$.

7.2. Feladat (5p)**.** Legyen $\mathbb{R}^\times$ a nullától különböző valós számok mátrix Lie-csoportja a szorzással. Mutassuk meg, hogy a $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ homomorfizmus érintőleképezése $(T_e \det)A = \mathrm{Tr}\,A$.

7.3. Feladat (5p)**.** Tekintsük a

$$
J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{7.1}
$$

blokk mátrixot, ahol a blokkok $n \times n$ méretűek (I az egységmátrix, 0 a nulla mátrix). Mutassuk meg, hogy

$$\mathrm{Sp}(2n) := \left\{ A \in \mathrm{GL}(n) \middle| A^T J A = J \right\}$$

mátrix Lie-csoport (szimplektikus csoport), és határozzuk meg a Lie-algebráját.

7.4. Feladat (10p)**.** Tekintsük az $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ téren $\mathrm{SO}(n)$ standard hatását. Milyen $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ esetén létezik U-n nem azonosan 0 invariáns k-forma? Írjuk is fel az invariáns k-formák általános alakját.

8. Hamilton-rendszerek szimmetriái, megmaradó mennyiségek

8.1. Feladat (15p)**.** Ez a feladat a kvantummechanikából ismert spin klasszikus mechanikai megfelelőjét mutatja be. Legyenek az $U = \mathbb{R}^3$ téren a szokásos koordinátafüggvények x, y, z. Az $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2\}$ részsokaság beágyazása legyen $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$, és tekintsük az

$$\omega = i^*(x\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \in \Gamma(\Lambda^2 T^* S^2)$$

formát.

a) Mutassuk meg, hogy ω szimplektikus forma.
b) Tekintsük $G = \mathrm{SO}(3)$ szokásos hatását ($\Phi_A(\mathbf{r}) = A\mathbf{r}$, ez a gömböt önmagába képezi). Mutassuk meg, hogy ω G-invariáns.
c) Határozzuk meg a $H_{\mathbf{B}} = i^*(B_x x + B_y y + B_z z) \in C^\infty(S^2)$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormezőt és annak integrálgörbéit, ha B_x, B_y, B_z valós paraméterek (a $\mathbf{B}$ mágneses tér komponensei). Útmutatás: oldjuk meg a feladatot pl. $B_x = B_y = 0$ paraméterekkel és használjuk G hatását.

8.2. Feladat (15p)**.** Ez a feladat a Kepler-probléma egy nem nyilvánvaló szimmetriáját mutatja be. Legyen $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $T^*Q \simeq Q \times \mathbb{R}^3$ szokásos koordinátafüggvényei $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ és

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|}. \tag{8.1}$$

A

$$\Sigma_- = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*Q | H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < 0\} \tag{8.2}$$

részsokaságon tekintsük az $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ és $\mathbf{R} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ vektorokat. (Az előbbi az impulzusmomentum, az utóbbi neve Runge-Lenz-vektor.)

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ komponensei mozgásállandók.

b) Legyen $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{-2H}}$. Igazoljuk, hogy

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k$$
$$\{L_i, K_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} K_k$$
$$\{K_i, K_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k,$$

ahol $\epsilon_{123} = 1$ és $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$.

c) Legyen $J_i^{\pm} = \frac{1}{2}(L_i \pm K_i)$. Határozzuk meg ezek egymással vett Poisson-zárójeleit is. (Ezzel azt mutatjuk meg, hogy az általuk meghatározott Hamilton-vektormezők az $SU(2) \times SU(2)$ csoport egy (lokális) hatásának infinitezimális generátorai.)

8.3. Feladat. Ebben a feladatban az izotróp harmonikus oszcillátor szimmetriáit vizsgáljuk. Legyen $Q = \mathbb{R}^n$, $M = T^*Q \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, a standard koordinátafüggvények $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$. Tekintsük a

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2) \tag{8.3}$$

Hamilton-függvényt. Legyen

$$G = \mathrm{SU}(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(2n) \middle| [A, J] = 0, A^T A = I, \det A = 1 \right\}, \tag{8.4}$$

ahol $J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ az i képzetes egységgel való komponensenkénti szorzás mátrixa a $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ azonosítás szerint. Tekintsük G standard hatását az M téren, azaz $\Phi_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ (a komplex komponenseket $q_i + ip_i$ módon írhatjuk)

a) Mutassuk meg, hogy ω G-invariáns.

b) Mutassuk meg, hogy H G-invariáns.

c) Határozzuk meg G Lie-algebráját és az infinitezimális generátorokat.

d) Adjunk meg G hatásához egy momentum-leképezést.

9. Differenciálható sokaságok

9.1. Feladat (10p)**.** Tekintsük $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ egy (U, φ) térképét, ahol $U = \{(x, y) \in S^1 | y \neq 1\}$, $\varphi(x, y) = \frac{x}{1-y}$. Legyen $\mathbb{R}$ koordinátafüggvénye $q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ és tekintsük az $X = (1 + q^2)\frac{\partial}{\partial q}$ vektormezőt.

a) Mutassuk meg, hogy az X vektormező nem teljes.

b) Legyen X lokális folyama F és tekintsük az $R_t(m) = \varphi_+^{-1}(F_t(\varphi_+(m)))$ leképezést ($\mathbb{R} \times S^1$ egy részhalmazából az S^1 térbe). Mutassuk meg, hogy R kiterjed egy $\mathbb{R}$-hatássá az egész S^1 téren (tehát egy teljes vektormező folyamává).

9.2. Feladat (10p)**.** Tekintsük $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ sztereografikus projekcióval kapott két térképét: $(U_\pm, \varphi_\pm)$, ahol $U_\pm = \{(x,y,z) \in S^2 | z \neq \pm 1\}$, $\varphi_\pm(x,y,z) = \left(\frac{x}{1\mp z}, \frac{y}{1\mp z}\right)$. Legyen $\mathbb{R}^2$ (vagyis a térképek érkezési terének) két standard koordinátafüggvénye q_1, q_2.

a) Határozzuk meg a $\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}$ áttérési függvényt. Kompatibilis-e a két térkép?

b) Mutassuk meg, hogy

$$\varphi_+^*\left(\frac{\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q^2}{1 + (q_1^2 + q_2^2)^2}\right)$$

és

$$\varphi_-^*\left(-\frac{\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q^2}{1 + (q_1^2 + q_2^2)^2}\right)$$

egy $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^* S^2)$ formának leszűkítései az $U_\pm$ részhalmazokra.

10. Marsden–Weinstein-redukció

10.1. Feladat (25p)**.** Ebben a feladatban térbeli centrálszimmetrikus potenciálban mozgó tömegpont mozgásának vizsgálatát vezetjük vissza redukcióval egydimenziós problémára.

Legyen $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $M = T^*Q \simeq Q \times \mathbb{R}^3$, a koordinátafüggvények $q_1, \ldots, q_3, p_1, \ldots, p_3$, a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$. Tekintsük $G = \mathrm{SO}(3)$ azon hatását, amire $\Phi_A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (A\mathbf{q}, A\mathbf{p})$ és a $H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V(|q|)$ Hamilton-függvényt, ahol $V : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sima függvény.

a) Írjuk fel a G hatásához tartozó J Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezést és ellenőrizzük, hogy H G-invariáns.

b) Mutassuk meg, hogy minden $\mu \in \mathfrak{so}(3)^*$ reguláris értéke a momentum-leképezésnek.

c) Határozzuk meg minden olyan $\mu \neq 0$ stabilizátorát, amelyre $J^{-1}(\mu) \neq \emptyset$, és mutassuk meg, hogy G_μ hatása a részsokaságon szabad.

d) Vezessük be a $J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ hányadoson a r, p_r koordinátákat a $\pi_\mu^* r = i_\mu^* |\mathbf{q}|$, $\pi_\mu^* p_r = i_\mu^*(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})/|\mathbf{q}|$ feltételek által. Mutassuk meg, hogy az indukált szimplektikus forma $\omega_\mu = \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}p_r$.

e) Határozzuk meg a redukált Hamilton-függvényt.

10.2. Feladat (25p)**.** Ebben a feladatban a redukció egy meglepő alkalmazásaként meghatározzuk a

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}$$

Hamilton-függvényből származó mozgásegyenlet megoldásait (Calogero–Moser-rendszer). Ez a rendszer egy egyenes mentén mozgó n darab egyforma tömegű tömegpont mozgását írja le, amelyek a távolság harmadik hatványával fordítottan arányos taszító erőt fejtenek ki egymásra.

Legyen $M = \{(X,Y)|X,Y \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), X = X^*, Y = Y^*\}$ az önadjungált mátrix-párok tere. A mátrixelemeknek megfelelő X_{ij}, Y_{ij} koordinátafüggvényekkel kifejezve tekintsük az

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{d}X_{ij} \wedge \mathrm{d}Y_{ji}$$

szimplektikus formát és a $H_k = \frac{1}{k}\operatorname{Tr} Y^k$ sima függvényeket. Speciálisan

$$H_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Y^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |Y_{ij}|^2$$

a szabad mozgás Hamilton-függvénye (n^2 dimenzióban).

A $G = \mathrm{SU}(n)$ csoport hat az M téren együttes konjugálással, azaz $\Phi_U(X,Y) = (UXU^*, UYU^*)$ módon. Azonosítsuk az $\mathfrak{su}(n)$ Lie-algebrát (nyomtalan ferdén önadjungált komplex $n \times n$ mátrixok) a duálisával az $(A,B) \mapsto -\operatorname{Tr} AB$ bilineáris leképezés segítségével. Legyen

$$\mu = i \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = i(v \cdot v^* - I_n),$$

ahol $v^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Tekintsük továbbá a $Q = \{(q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^n | q_1 > q_2 > \ldots > q_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazt és a $T^*Q \simeq Q\times\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ koérintőnyalábon a $q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ kanonikus koordinátákat, valamint az $\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j$ kanonikus szimplektikus formát.

a) Mutassuk meg, hogy H_j G-invariáns és írjuk fel a H_j Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező integrálgörbéit.

b) Bizonyítsuk be, hogy $J(X,Y) = [X,Y]$ a Φ hatáshoz tartozó Ad^* ekvivariáns momentum-leképezés.

c) Mutassuk meg, hogy ha $(X, Y) \in J^{-1}(\mu)$, akkor létezik olyan $U \in G_\mu$, amivel UXU^* diagonális és a főátló elemei csökkenő sorrendben vannak. (Útmutatás: ha U diagonalizálja az X mátrixot, akkor $U[X, Y]U^* + iI_n$ egy rangú és az átlóban i elemek szerepelnek)

d) Mutassuk meg, hogy az $S : T^*Q \to J^{-1}(\mu)/G_\mu$

$$
\begin{aligned}
&S(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \\
&\quad = \left(\begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1 & i\frac{1}{q_1 - q_2} & \cdots & i\frac{1}{q_1 - q_n} \\ i\frac{1}{q_2 - q_1} & p_2 & \ddots & i\frac{1}{q_2 - q_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ i\frac{1}{q_n - q_1} & i\frac{1}{q_n - q_2} & \cdots & p_n \end{bmatrix} \right) \\
&\quad = \Big((\delta_{jk} q_j)_{j,k=1}^n, (\delta_{jk} p_j + i(1 - \delta_{jk})(q_j - q_k)^{-1})_{j,k=1}^n \Big)
\end{aligned}
$$

leképezés szimplektomorfizmus.

e) Az S leképezésen keresztül azonosítva a $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ és T^*Q tereket határozzuk meg a redukált Hamilton-függvényt mint $C^\infty(T^*Q)$ elemét.

A fentiek alapján a Caloger–Moser-rendszer adott kezdeti feltétel melletti megoldását a következőképp kaphatjuk meg: az S leképezés segítségével előállítjuk az (X, Y) párt; a tömegpontok helykoordinátái a t időpillanatban az $X + tY$ mátrix sajátértékei.