A klasszikus mechanika matematikai módszerei

Vrana Péter

2019. december 10. (létrehozva)
2020. május 10. (jelen verzió)

Tartalomjegyzék

1. Newton-egyenlet

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III. Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

1.1. Definíció. *Egy* $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n) : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^3)^n$ *függvényt erőtörvénynek nevezünk. Az* n *tömegpontra vonatkozó Newton-egyenlet* $m_1, \dots, m_n$ *tömegekkel és* $\mathbf{F}$ *erőtörvénnyel a következő differenciálegyenlet-rendszert jelenti:*

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n, t) \\ &\vdots \\ m_n\ddot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n, t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.1) alakban minden másodrendű explicit differenciálegyenlet-rendszert fel lehet írni. A következőkben az lesz a célunk, hogy az erőtörvényre vonatkozó további (fizikailag motivált) feltevések segítségével a megoldásokra vonatkozó (a differenciálegyenletek általános elméletén túlmutató) állításokat bizonyítsunk. Ennek illusztrálására elsőként az impulzusmegmaradást látjuk be a harmadik törvény felhasználásával.

1.2. Állítás (Impulzusmegmaradás)**.** *Legyenek* $\mathbf{F}_{i,j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *függvények, és tekintsük a*

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j) \tag{1.2}$$

($i = 1, \dots, n$*) differenciálegyenlet-rendszert. Ha minden* i, j *index és az argumentumok tetszőleges értékei esetén*

$$\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) = -\mathbf{F}_{j,i}(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \tag{1.3}$$

teljesül, akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{r}}_i(t) \tag{1.4}$$

mennyiség (impulzus, lendület) minden megoldás mentén állandó.

Bizonyítás. Legyen (1.2) egy megoldása $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ megoldása és írjuk fel (1.4) deriváltfüggvényét:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j) + \mathbf{F}_{j,i}(\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j, \mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i)\right) = 0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

A második lépésben azt használtuk, hogy $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ megoldás, a harmadik lépésben felcseréltük az i és j összegzőindexeket, majd az eredeti alakkal átlagoltuk a kifejezést, az utolsó lépésben használtuk a (1.3) feltevést. □

Érdemes észrevenni, hogy a bizonyításhoz az erő pontos alakjára nem volt szükség, holott maga a mozgás csak annak ismeretében lenne (elvileg) meghatározható. A későbbi fejezetekben is ehhez hasonló gondolatmenetet fogunk követni: a mozgásegyenlet tulajdonságait felhasználva vizsgáljuk a megoldások tulajdonságait, jellemzően magának a mozgásnak a meghatározása nélkül.

A következő fontos példa az energiamegmaradás, amely

1.3. Definíció. *Az* $\mathbf{F} : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^3)^n$ *erőtörvény konzervatív, ha létezik olyan* $U : (\mathbb{R}^3)^n \to \mathbb{R}$ *függvény, hogy*

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, t) = -\operatorname{grad}_i U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \tag{1.6}$$

teljesül. Ilyenkor az U *függvény neve potenciális energia.*

1.4. Állítás (Energiamegmaradás)**.** *Tegyük fel, hogy az* $\mathbf{F}$ *erőtörvény konzervatív és tekintsük az* (1.1) *differenciálegyenlet-rendszert. Ekkor az*

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left|\dot{\mathbf{r}}_i\right|^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \tag{1.7}$$

mennyiség (energia) minden megoldás mentén állandó.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ megoldása Newton-egyenletrendszernek és írjuk fel (1.7) deriváltfüggvényét:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t)\cdot\dot{\mathbf{r}}_i(t) + U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i(t)\cdot\ddot{\mathbf{r}}_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}_i U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) + \operatorname{grad}_i U(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))\right]\cdot\dot{\mathbf{r}}_i(t) = 0.\end{aligned} \tag{1.8}$$

A második lépésben a láncszabályt használtuk, az utolsóban pedig azt, hogy $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ megoldás. $\square$

Vegyük észre, hogy nem minden konzervatív erőtörvény felel meg a harmadik törvény feltételeinek. Például $n = 1$ test esetén csak az azonosan 0 függvény teljesíti a harmadik törvényt, de minden nem konstans potenciális energiafüggvény meghatároz egy nem azonosan eltűnő konzervatív erőtörvényt.

2. A variációszámítás alapjai

2.1. Normált terek és derivált

2.1. Definíció (normált tér, korlátos lineáris leképezés)**.** *A V valós vektortéren egy $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{>0}$ leképezés norma, ha $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ és ha $\|v\| = 0$, akkor $v = 0$. A $(V, \|\cdot\|)$ párt ilyenkor normált térnek nevezzük (ha a környezetből kiderül, akkor általában csak a vektortér szimbólumával hivatkozunk a normált térre is).*

Legyenek V, W normált terek. Az $A : V \to W$ lineáris leképezés korlátos, ha létezik olyan $M \geq 0$ szám, hogy $\forall v \in V : \|Av\| \leq M \|v\|$. Az A korlátos lineáris leképezés normája

$$\|L\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Lv\|}{\|v\|}. \tag{2.1}$$

(Ha $\dim V = 0$, akkor $\|L\| = 0$ konvenció)

2.2. Definíció (differenciálható függvények tere)**.** *Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, $a < b$ valós számok. $C^k([a,b], \mathbb{R}^n)$ jelöli a k-szor folytonosan differenciálható $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ függvények halmazát (a végpontokban féloldali deriváltakat értve).*

2.3. Állítás. *$C^k([a,b], \mathbb{R}^n)$ a pontonkénti műveletekkel és a*

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in U} |f^{(i)}(x)| \tag{2.2}$$

normával normált tér.

2.4. Állítás. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsük azt az $I : C^k([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ leképezést, amely az f függvényhez az $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ számot rendeli. Ekkor I korlátos lineáris leképezés.*

Bizonyítás. A linearitás a Riemann-integrál ismert tulajdonságaiból következik. A korlátosság bizonyításához a háromszög-egyenlőtlenséget használhatjuk:

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f\|_{C^k}\,\mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_{C^k}. \tag{2.3}$$

□

2.5. Definíció (derivált, első variáció, stacionárius pont)**.** *Legyenek V, W normált terek, $\Phi : V \to W$ leképezés. Azt mondjuk, hogy Φ az $x \in V$ pontban Fréchet-differenciálható és deriváltja ott az $A : V \to W$ korlátos lineáris leképezés, ha*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.4}$$

azaz $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h \in V : \|h\| < \delta \implies \|\Phi(x+h) - \Phi(x) - Ah\| \leq \epsilon \|h\|$.

Ha az érkezési tér $\mathbb{R}$, *akkor a deriváltat* Φ *első variációjának is nevezzük. A* $v \in V$ *pont az* S *stacionárius pontja, ha ott az első variáció* 0.

Valamivel általánosabban tekinthetjük a V *normált tér egy* U *affin alterét és azon egy* $\Phi : U \to W$ *leképezést. Ekkor* $U_0 = U - U$ *lineáris altér* V*-ben, a norma megszorításával maga is normált tér, és akkor nevezzük a* Φ *függvényt differenciálhatónak az* $x \in U$ *pontban, ha létezik olyan* $A : U_0 \to W$ *korlátos lineáris leképezés, amelyre a fenti határérték* 0, *ahol most csak* $h \in U_0$ *vektorokat engedünk meg.*

A Fréchet-differenciálhatóság definíciójában szereplő korlátos lineáris leképezés egyértelmű, szokásos jelölése $D_x\Phi$.

2.6. Példa. *Ha* $\Phi : V \to W$ *korlátos lineáris leképezés, akkor minden pontban differenciálható és a deriváltja mindenhol* Φ, *ugyanis*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi h\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.5}$$

2.7. Állítás. *Legyenek* U, V, W *normált terek,* $F : U \to V$ *és* $G : V \to W$ *Fréchet-differenciálható leképezések. Ekkor* $G \circ F$ *is Fréchet-differenciálható és deriváltja az* $x \in U$ *pontban* $D_x(G \circ F) = D_{F(x)}G \circ D_xF$.

Bizonyítás. Vezessük be az

$$r_F(h) = F(x+h) - F(x) - D_xF(h) \tag{2.6}$$

$$r_G(h) = G(F(x)+h) - G(F(x)) - D_{F(x)}G(h) \tag{2.7}$$

jelöléseket. Mivel F és G Fréchet-differenciálható, $\lim_{h\to 0} \|r_F(h)\| / \|h\| = 0$ és $\lim_{h \to 0} \|r_G(h)\| / \|h\| = 0$.

$$\begin{aligned} G(F(x+h)) &= G(F(x) + D_xF(h) + r_F(h)) \\ &= G(F(x)) + D_{F(x)}G(D_xF(h) + r_F(h)) + r_G(D_xF(h) + r_F(h)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Az utolsó tag normáját így becsüljük:

$$\begin{aligned} \frac{\|r_G(D_xF(h) + r_F(h))\|}{\|h\|} &= \frac{\|r_G(D_xF(h) + r_F(h))\|}{\|D_xF(h) + r_F(h)\|} \frac{\|D_xF(h) + r_F(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq \frac{\|r_G(D_xF(h) + r_F(h))\|}{\|D_xF(h) + r_F(h)\|} \left(\|D_xF\| + \frac{\|r_F(h)\|}{\|h\|} \right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

A második tényező korlátos, míg az első nullához tart, amint $h \to 0$ és így $D_xF(h) + r_F(h) \to 0$. $\square$

2.2. Euler–Lagrange-egyenletek

2.8. Lemma (Lagrange)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Ha minden $g \in C^\infty([a,b])$ függvényre*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.10}$$

teljesül, akkor $f = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \neq 0$, azaz létezik olyan $x_0 \in [a,b]$, hogy $f(x_0) \neq 0$. Legyen $f(x_0) > 0$ (ellenkező esetben az érvelést a $-f$ függvényre alkalmazzuk). A folytonosság miatt ekkor $x_0 \in (a,b)$ választható és létezik olyan $\delta > 0$, hogy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Válasszuk a

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{\delta}+\frac{1}{x-(x_0+\delta)}-\frac{1}{x-(x_0-\delta)}} & \text{ha } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{2.11}$$

függvényt. Erre $g \in C^\infty([a,b])$ és $x \in (x_0-\delta/2, x_0+\delta/2) \implies g(x) > 1/4$ teljesül, tehát

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} \frac{f(x_0)}{2}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\delta f(x_0)}{8} > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

□

2.3. Hamilton-elv

2.4. Noether-tétel

2.9. Definíció (diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja)**.** *$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto \varphi_t(x)$ diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja, ha sima függvény, $\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ és $s,t \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.*

2.10. Tétel (Noether-tétel)**.** *Legyen $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, φ diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja. Tegyük fel, hogy L φ-invariáns, azaz $L(x,\dot{x}) = L(\varphi_t(x), (D_x\varphi_t)\dot{x})$ minden $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^n$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor*

$$I(x,\dot{x}) = \nabla_{\dot{x}} L \cdot \left.\frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial s}\right|_{s=0} \tag{2.13}$$

állandó az Euler–Lagrange-egyenletek minden megoldása mentén.

Bizonyítás. Legyen x az Euler–Lagrange-egyenletek egy megoldása, ekkor minden $s \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_s \circ x$ is megoldás. Mivel L φ-invariáns,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial s} L(\varphi_s(x(t)), (D_{x(t)}\varphi_s)\dot{x}(t))\Big|_{s=0} \\
&= \nabla_x L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_s(x(t))}{\partial s}\Big|_{s=0} + \nabla_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \frac{\partial (D_{x(t)}\varphi_s)\dot{x}(t)}{\partial s}\Big|_{s=0} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nabla_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t))\right) \cdot \frac{\partial \varphi_s(x(t))}{\partial s}\Big|_{s=0} + \nabla_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \frac{\partial (D_{x(t)}\varphi_s)\dot{x}(t)}{\partial s}\Big|_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\nabla_{\dot{x}} L(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \frac{\partial \varphi_s(x(t))}{\partial s}\Big|_{s=0}\right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

□

2.11. Példa. *Legyen* $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - V(|x|)$, *ahol* V *adott sima függvény. Tekintsük a* $\varphi_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3, \ldots, x_n)$ *egyparaméteres csoportot. Ekkor* L φ*-invariáns és*

$$\begin{aligned}
I(x, \dot{x}) &= \nabla_{\dot{x}} L \cdot \frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial s}\Big|_{s=0} \\
&= \dot{x} \cdot (x_2, -x_1, 0, \ldots, 0) = x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A többi koordinátasíkban való forgatásokat tekintve hasonlóan adódik, hogy $x_i\dot{x}_j - x_j\dot{x}_i$ *mozgásállandó.*

2.5. Koordinátatranszformáció

2.12. Állítás. *Legyen* $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *sima leképezés,* $k \in \mathbb{N}$. *A* $\Phi : C^k([t_1, t_2], \mathbb{R}^m) \to C^k([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, $\Phi(f) = \varphi \circ f$ *leképezés mindenhol differenciálható és deriváltja* $D_x\Phi(h)(t) = D_{x(t)}\varphi(h(t))$.

Bizonyítás. $n = m = 1$ eset:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varphi(x(t) + h(t)) - \varphi(x(t)) - \varphi'(x(t))h(t)\right] \\
&= (x'(t) + h'(t))\left[\varphi'(x(t) + h(t)) - \varphi'(x(t)) - \varphi''(x(t))h(t)\right] + h(t)h'(t)\varphi''(x(t))
\end{aligned} \tag{2.16}$$

stb. indukicóval az r. deriváltban $x(t) + h(t)$ első r deriváltjának polinomja van a szögletes zárójelben szereplőhöz hasonló, legfeljebb $r + 1$. deriváltakat tartalmazó kifejezéssel szorozva, illetve h deriváltjainak másodfokú polinomja szorozva $\varphi^{(j)}(x(t))$ valamely deriváltjával. □

2.13. Következmény. *Ha* φ *diffeomorfizmus, akkor* x *az* $S \circ \Phi$ *funkcionálnak pontosan akkor stacionárius pontja* $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ *peremfeltételek mellett, ha* $\varphi \circ x$ *az* S *stacionárius pontja* $x(t_1) = \varphi(x_1)$, $x(t_2) = \varphi(x_2)$ *feltétel mellett.*

3. Vektormezők

Ebben a szakaszban $n \in \mathbb{N}$ rögzített szám, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazt jelöl.

3.1. Érintővektorok

3.1. Definíció (Érintővektor I). *Legyen $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$. Az (x, v) párt x-beli érintővektornak nevezzük. Az (x, v_1) és (x, v_2) x-beli érintővektorok összege $(x, v_1 + v_2)$, az (x, v) x-beli érintővektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ szorzata $(x, \lambda v)$.*

A megadott műveletekkel az x-beli érintővektorok halmaza vektortér.

3.2. Definíció (Érintővektor II). *Legyen $x \in U$, $\epsilon > 0$. Egy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ leképezést x pontbeli lokális görbének nevezünk, ha folytonosan differenciálható és $\gamma(0) = x$. A $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to U$ és $\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to U$ x-beli lokális görbék ekvivalensek, ha a 0 helyen megegyezik a deriváltjuk. Az $\gamma : (-\epsilon, \epsilon)$ x pontbeli lokális görbe ekvivalenciaosztályát $[\gamma]_x$. Az ekvivalenciaosztályokat x-beli érintővektoroknak nevezzük.*

A $[\gamma_1]_x$ és $[\gamma_2]_x$ ekvivalenciaosztályok összege $[x + (\gamma_1 - x) + (\gamma_2 - x)]_x$, a $[\gamma]_x$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ szorzata $[x + \lambda(\gamma - x)]_x$.

Mivel a deriválás lineáris, a megadott műveletek valóban jól definiáltak és velük az érintővektorok halmaza vektortér.

3.3. Definíció (Érintővektor III). *Legyen $x \in U$. Egy $D : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ leképezést x-beli derivációnak nevezünk, ha lineáris és $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén $D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$.*

Az x-beli derivációk vektorteret alkotnak (a pontonkénti műveletekkel), hiszen az összes $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések teréből lineáris feltételekket kiszabva választjuk ki azokat.

Szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.4. Lemma (Hadamard). *Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ és $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor léteznek olyan $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvények, amelyekkel*

$$f(\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i) g_i(\xi) \tag{3.1}$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen h_i az f parciális deriváltja az i. változó szerint és

$$g_i(\xi) = \int_0^1 h_i(x + t(\xi - x))\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Ekkor a többváltozós láncszabály és a Newton–Leibniz-formula alapján

$$
\begin{aligned}
f(\xi) - f(x) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n h_i(x + t(\xi - x))(\xi_i - x_i)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i) \int_0^1 h_i(x + t(\xi - x))\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i) g_i(\xi).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

□

Most belátjuk, hogy a háromféle definíció különféle nézőpontból lényegében ugyanazt a fogalmat ragadja meg.

3.5. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, és tekintsük a következő leképezéseket:*

- *i_1 legyen az a függvény, ami $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az (x, v) párhoz a $t \mapsto x+tv$ x-beli lokális görbe ekvivalenciaosztályát rendeli*
- *i_2 legyen az a függvény, ami a γ x-beli lokális görbéhez a $D : f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ derivációt rendeli*
- *i_3 legyen az a függvény, ami a $D : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ x-beli derivációhoz a $v = (D(x_1), D(x_2), \dots, D(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ vektort rendeli, ahol $x_1, \dots, x_n \in C^\infty\mathbb{R}^n$ a standard koordinátafüggvények.*

Ekkor mindhárom leképezés jól definiált lineáris izomorfizmus.

Bizonyítás. A görbék ekvivalenciaosztályait a 0 pontbeli deriváltakkal cimkézhetjük (mint halmaz), amelyek $\mathbb{R}^n$ elemei. A definícióból közvetlenül következik, hogy a műveletek a szokásos komponensenkénti műveletekkel egyeznek meg, tehát a második definíció szerint is n dimenziós vektorteret kapunk.

Ha D x-beli deriváció, akkor a konstant 1 függvényre

$$
D(1) = D(1^2) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1) \tag{3.4}
$$

teljesül, tehát $D(1) = 1$. Ha $f \in C^\infty(U)$ tetszőleges, akkor írjuk fel a Hadamard-lemma szerinti $f = f(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - c_i) g_i$ alakba, ahol $f(x), c_1, \dots, c_n$ a megfelelő konstans függvényeket jelenti, $g_i \in C^\infty(U)$. Ekkor a linearitás és a Leibniz-szabály alapján

$$
\begin{aligned}
D(f) &= f(x)D(1) + \sum_{i=1}^n \left[(D(x_i) - c_i D(1)) g_i(x) + (x_i(x) - c_i) D(g_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n D(x_i) g_i(x),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

felhasználva, hogy $D(1) = 0$ és $x_i(x) = c_i$. Ez azt jelenti, hogy a D derivációt a $D(x_1), \dots, D(x_n)$ számok egyértelműen meghatározzák, vagyis az x-beli derivációk tere legfeljebb n dimenziós. Másrészt a parciális deriváltak n lineárisan független derivációt adnak, hiszen $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, tehát a dimenzió ebben az esetben is n.

A leképezések közül i_2 van reprezentánsokkal megadva, tehát itt merül fel, hogy jól definiált-e. Legyen $[\gamma_1]_x = [\gamma_2]_x$ és $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_1(t))\bigg|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(0))(\gamma_1'(0))_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_2(0))(\gamma_2'(0))_i \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma_2(t))\bigg|_{t=0}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

ahol a második lépésben felhasználtuk, hogy $\gamma_1(0) = x = \gamma_2(0)$ és $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ az ekvivalencia definíciója szerint.

Tekintsük most az $i_3 \circ i_2 \circ i_1$ kompozíciót és alkalmazzuk az (x, v) párra, ahol $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. A megfelelő görbe $t \mapsto x + tv$, így x_j deriváltja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(x + tv)\bigg|_{t=0} = v_i, \tag{3.7}$$

vagyis $i_3 \circ i_2 \circ i_1 = (x, v)$. □

3.6. Példa. *Legyen $U = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a standard bázis, $x \in U$. Az (x, e_i) párnak megfelel a $\gamma(t) = x + te_i$ görbe ekvivalenciaosztálya, illetve az a $D : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ leképezés, amely az f függvényhez annak i. változója szerinti parciális derivált x-beli értékét rendeli. Ennek az érintővektornak a jelölésére a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ szimbólumot fogjuk használni.*

Egy paraméterezett görbe érintővektorát a deriválttal értelmezzük. A fenti definíciók alapján egy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ görbe 0 pontbeli érintőjének éppen a $[\gamma]_{\gamma(0)}$ ekvivalenciaosztályt feleltetjük meg, ami tehát az irány mellett az érintési pontot is meghatározza. Ehhez hasonlóan beszélhetünk egy tetszőleges $\gamma : I \to U$ görbe ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) tetszőleges pontbeli érintőjéről. Ha $t_0 \in I$ és bevezetjük az $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = t + t_0$ eltolást, akkor kézenfekvő a

$$\dot{\gamma}(t) := [\gamma \circ s]_{\gamma(t_0)} \tag{3.8}$$

érintővektort rendelni a görbe t_0 paraméterértékhez tartozó pontjához.

3.7. Definíció (érintőtér, érintőnyaláb)**.** *Az x-beli érintővektorok halmaza az érintőtér, jele $T_x\mathbb{R}^n$. Ha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt részhalmaz, akkor a $TU = \bigcup_{x \in U} T_x\mathbb{R}^n \simeq U \times \mathbb{R}^n$ teret U érintőnyalábjának nevezzük. Ezen értelmezzük a $\tau_U : TU \to U$, $\tau_U(x, v) = x$ leképezést.*

Azt is mondjuk, hogy például $T_x U = T_x \mathbb{R}^n$ az U érintőnyalábjának x feletti fibruma.

3.8. Definíció (érintőleképezés)**.** *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ és $V \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt, $f : U \to V$ sima és $x \in U$. Az f érintőleképezése az a $Tf : TU \to TV$ leképezés, amely minden $x \in U$ esetén a $[\gamma]_x$ vektorhoz az $[f \circ \gamma]_{f(x)}$ vektort rendeli. Az f leképezés x pontbeli érintőleképezése $T_x f = Tf|_{T_x U} : T_x U \to T_{f(x)} V$.*

3.9. Állítás (láncszabály)**.** *$T\mathrm{id}_U = \mathrm{id}_{TU}$ és ha $f : U \to V$ és $g : V \to W$ sima leképezések, akkor $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.*

Bizonyítás. [FoM, 1.6.7] □

3.10. Definíció (vektormező)**.** *Egy $X : U \to TU$ sima leképezést vektormezőnek nevezünk, ha $\tau_U \circ X = \mathrm{id}_U$. A vektormezők halmazát $\Gamma(TU)$ jelöli.*

A vektormezőkre úgy gondolunk, hogy U minden pontjához hozzárendelnek egy elemet az adott pontbeli érintőtérből, méghozzá a pont feletti fibrumból. Két vektormezőt pontonként össze lehet adni, illetve egy vektormezőt pontonként megszorozhatunk egy sima függvénnyel.

3.2. Vektormező mint differenciáloperátor

Láttuk, hogy a vektorokat iránymenti deriváltakkal lehet azonosítani. Ha $X \in \Gamma(TU)$ és $f \in C^\infty(U)$, akkor képezhetjük azt az $X(f) \in C^\infty(U)$ függvényt, amelynek x pontban felvett értéke az f x pontbeli $X(x)$ irányú deriváltja, azaz

$$X(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + tX(x))\bigg|_{t=0}. \tag{3.9}$$

A kapott függvényt f X irányú deriváltjának nevezzük. Egy adott X vektormező által meghatározott deriválás mint $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ leképezés lineáris és teljesíti a Leibniz-szabályt, azaz $X(fg) = X(f)g + fX(g)$. Ennek a megfordítása is igaz:

3.11. Tétel. *Legyen $\theta : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ lineáris leképezés, amelyre $\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g)$ teljesül minden $f, g \in C^\infty(U)$ esetén. Ekkor létezik pontosan egy $X \in \Gamma(TU)$, amivel $\theta(f) = X(f)$.*

Bizonyítás. [FoM, 2.2.10] □

A tételben szereplő tulajdonságú leképezéseket bármely algebrán értelmezhetünk és általában derivációknak hívjuk.

3.12. Állítás. *Legyen $X, Y \in \Gamma(TU)$. Ekkor $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ deriváció.*

Bizonyítás. $X \circ Y$ és $Y \circ X$ lineáris leképezések kompozíciói, tehát maguk is lineárisak. Ilyenek különbsége is lineáris, tehát elegendő a Leibniz-szabály teljesülését ellenőrizni.

$$\begin{aligned} X(Y(fg)) - Y(X(fg)) &= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\ &= X(Y(f)g) + X(fY(g)) - Y(X(f)g) - Y(fX(g)) \\ &= X(Y(f))g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - Y(X(f))g - X(f)Y(g) \\ &= X(Y(f))g + fX(Y(g)) - Y(X(f))g - fY(X(g)) \\ &= \left[X(Y(f)) - Y(X(f))\right] g + f\left[X(Y(g)) - Y(X(g))\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

□

3.13. Definíció (Lie-zárójel)**.** *Legyen $X, Y \in \Gamma(TU)$. A 3.11 tétel értelmében az $f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$ derivációhoz tartozó vektormezőt X és Y Lie-zárójelének nevezzük, és az $[X, Y]$ szimbólummal jelöljük.*

A Young–tétel szerint a parciális deriváltakra mint vektormezőkre $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ teljesül. Igaz továbbá az $[X, gY] = X(g)Y + g[X, Y]$ azonosság, ahol X, Y vektormezők, g sima függvény:

$$\begin{aligned} [X, gY](f) &= X(gY(f)) - gY(X(f)) \\ &= X(g)Y(f) + gX(Y(f)) - gY(X(f)) \\ &= X(g)Y(f) + g[X, Y](f) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hasonlóan, $[gX, Y] = -Y(g)X + g[X, Y]$. Ezek segítségével ki tudjuk számolni koordinátákkal adott vektormezők Lie-zárójelét. Legyen $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ és $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, ahol $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ sima függvények. Ekkor

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i,j=1}^n \left[X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + Y_j \left[X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + Y_j X_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.3. Vektormező mint differenciálegyenlet

3.14. Definíció (integrálgörbe)**.** *Legyen $X \in \Gamma(TU)$ vektormező, $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. A $\gamma : I \to U$ görbe az X egy integrálgörbéje, ha $\forall t \in I$: $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$.*

3.15. Definíció (folyam)**.** *Legyen* $X \in \Gamma(TU)$ *vektormező. Az* $F : \mathbb{R} \times U \to U$*,* $(t, x) \mapsto F_t(x)$ *leképezés az* X *folyama, ha* $F_0 = \mathrm{id}_U$ *és minden* $x \in U$ *pontra* $t \mapsto F_t(x)$ *az* X *integrálgörbéje.*

Az (U_0, a, F) *hármas az* X *vektormező* $x_0 \in U$ *körüli lokális folyama, ha*

(i) $U_0 \subseteq U$ *nyílt,* $x_0 \in U_0$*,* $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *vagy* $a = \infty$

(ii) $F : (-a, a) \times U_0 \to U$ *sima*

(iii) minden $x \in U_0$ *esetén* $F_0(x) = x$ *és* $t \mapsto F_t(x)$ *az* X *integrálgörbéje*

(iv) minden $t \in I$ *esetén* $F_t(U_0)$ *nyílt és* $F_t : U_0 \to F_t(U_0)$ *diffeomorfizmus.*

Mivel X sima, a közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert Picard–Lindelöf-tétel és a kezdeti feltételtől való sima függés alapján minden pont körül létezik lokális folyam. Viszont (globális) folyam általában nem létezik, előfordulhat ugyanis, hogy egy pontból indított integrálgörbe véges idő alatt elhagyja az U halmazt. Az olyan vektormezőket, amelynek globálisan is (azaz minden $t \in \mathbb{R}, x \in U$ esetén) létezik a folyama, teljesnek nevezzük.

4. Differenciálformák

4.1. Multilineáris formák

4.1. Definíció (multilineáris forma)**.** *Legyen V valós vektortér. Egy $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ leképezést k-lineáris formának (vagy multilineáris formának, $k = 2$ esetén bilineáris formának) nevezünk, ha bármely $k-1$ argumentumát rögzítve a fennmaradó változóban lineáris. A $V^k \to \mathbb{R}$ multilineáris leképezések halmazát $L^k(V, \mathbb{R})$ jelöli.*

Egy $\alpha \in L^k(V, \mathbb{R})$ formát alternálónak nevezünk, ha $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$ teljesül minden olyan $v_1, \ldots, v_k$ vektorokra, amelyek nem mind különbözőek. Az altárnáló formák halmazát $L^k_a(V, \mathbb{R})$ jelöli.

$L^k(V, \mathbb{R})$ valós vektortér a pontonkénti műveletekre nézve és $L^k_{\mathrm{a}}(V, \mathbb{R}) \leq L^k(V, \mathbb{R})$ altér. Ha $\dim V < \infty$, akkor $\dim L^k(V, \mathbb{R}) = (\dim V)^k$ és $\dim L^k_{\mathrm{a}}(V, \mathbb{R}) = \binom{\dim V}{k}$.

4.2. Definíció. *Az $\alpha \in L^k(V, \mathbb{R})$ és $\beta \in L^l(V, \mathbb{R})$ formák tenzorszorzata az az $\alpha \otimes \beta \in L^{k+l}(V, \mathbb{R})$ forma, amire*

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \alpha(v_1, \ldots, v_k)\beta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \tag{4.1}$$

teljesül.

Az $A : L^k(V, \mathbb{R}) \to L^k_a(V, \mathbb{R})$ antiszimmetrizáló leképezést a következőképp definiáljuk:

$$At(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) t(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-k}(1)}). \tag{4.2}$$

Az $\alpha \in L^k_a(V, \mathbb{R})$ és $\beta \in L^l_a(V, \mathbb{R})$ alternáló formák külső szorzata

$$\alpha \wedge \beta = \binom{k+l}{k} A(\alpha \otimes \beta). \tag{4.3}$$

A $\wedge$ külső szorzással $\bigoplus_{k=0}^{\dim V} L^k_{\mathrm{a}}(V, \mathbb{R})$ algebra.

Ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a $V^* = L^1(V, \mathbb{R}) = L^1_{\mathrm{a}}(V, \mathbb{R})$ egy bázisa, akkor

$$\{\alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\} \tag{4.4}$$

az $L^k_{\mathrm{a}}(V, \mathbb{R})$ bázisa.

4.3. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és $k \in \mathbb{N}$. $T_k(TU) := \bigcup_{x \in U} L^k(T_x U, \mathbb{R}) \simeq U \times L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a k rendű kovariáns tenzornyaláb, sima szelései a k rendű kovariáns tenzormezők.*

$\Lambda^k T^* U := \bigcup_{x \in U} L^k_a(T_x U, \mathbb{R}) \simeq U \times L^k_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a k rendű antiszimmetrikus tenzornyaláb, sima szelései a k-formák vagy k rendű differenciálformák. $k = 1$ esetén a jelölés T^*U. $\Lambda^\bullet T^* U := \bigcup_{x \in U} \bigoplus_{k=0}^n L^k_a(T_x U, \mathbb{R}) \simeq U \times \bigoplus_{k=0}^n L^k_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a külső algebra nyaláb, szelései a differenciálformák.

$T^*_x U$ jelöli az érintőtér duálisát, azaz a $\operatorname{Hom}(T_x \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ teret, elemeit kovektoroknak, magát a duális teret koérintőtérnek hívjuk.

A tenzornyalábok szeléseinek a simaságára a következőképp is gondolhatunk. Ha $X_1, \dots, X_k$ vektormezők, akkor egy $\alpha : U \to T_k(TU)$ szelés pontonkénti kiértékelése meghatároz egy $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ valós értékű függvényt az U nyílt halmazon. α pontosan akkor sima, ha a vektormezők bármely megválasztása esetén a kapott függvény sima.

A pontonkénti műveletekkel $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*U)$ algebra.

4.4. Definíció (visszahúzott differenciálforma)**.** *Legyen* $U \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *nyílt,* $f : U \to V$ *sima. Egy* $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*V)$ *differenciálforma visszahúzottja az* f *leképezés mentén az az* $f^*\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$ *differenciálforma, amelyre a* $v_1, \dots, v_k \in T_xU$ *vektorok tetszőleges választása esetén*

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(T_xf(v_1), \dots, T_xf(v_k)) \tag{4.5}$$

teljesül.

4.5. Példa. *Legyen* $U = \mathbb{R}$*,* $V = \mathbb{R}^2$*,* $t : U \to \mathbb{R}$*,* $x, y : V \to \mathbb{R}$ *a koordinátafüggvények. Legyen* $f(t) = (t, t^2)$*,* $\alpha = x\,\mathrm{d}y$*. Ekkor* $T_t(t, 1) = ((t, t^2), (1, 2t))$*, és így*

$$(f^*\alpha)_t(1) = t \cdot 2t, \tag{4.6}$$

azaz $f^*\alpha = 2t^2\,\mathrm{d}t$*.*

4.6. Definíció. *Legyen* X *vektormező,* α k*-forma az* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt halmazon.* X *és* α *belső szorzata az az* $\mathbf{i}_X\alpha$ $k-1$*-forma, amelyre tetszőleges* $X_1, \dots, X_{k-1}$ *vektormezők esetén*

$$\mathbf{i}_X\alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_k) \tag{4.7}$$

teljesül. Ha α 0*-forma, akkor a* $\mathbf{i}_X\alpha = 0$ *konvenciót alkalmazzuk.*

4.7. Állítás. *Legyen* $X \in \Gamma(TU)$*. Ekkor az alábbiak teljesülnek:*

(i) az $\mathbf{i}_X$ *leképezés* -1 *fokú fokszámozott deriváció, azaz* $\mathbb{R}$*-lineáris és* $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$*,* $\beta \in \Gamma(\Lambda^l T^*U)$ *esetén* $\mathbf{i}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{i}_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathbf{i}_X\beta$

(ii) ha $f \in C^\infty(U)$ *és* $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$*, akkor* $\mathbf{i}_{fX}\alpha = f\mathbf{i}_X\alpha$

Bizonyítás. [FoM, 2.4.13] □

4.2. Differenciálformák deriválása

4.8. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$*. Létezik leképezések egy egyértelmű* $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_{U,k})$ *családja, ahol* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt,* $k = 0, 1, \dots, n-1$ *és* $\mathrm{d}_{U,k} : \Gamma(\Lambda^k T^*U) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} T^*U)$ *lineáris leképezés, amelyekre a következők teljesülnek:*

(i) d 1 *fokú fokszámozott derviáció, azaz* $\mathbb{R}$*-lineáris és* $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$*,* $\beta \in \Gamma(\Lambda^l T^*U)$ *esetén* $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$

(ii) ha $f \in C^\infty(U)$ *és* $X \in \Gamma(TU)$*, akkor* $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$

(iii) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$

(iv) ha $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ *és* $i : U \to V$ *a beágyazás, akkor* $\mathrm{d} \circ i^* = i^* \circ \mathrm{d}$

Bizonyítás. [FoM, 2.4.5] □

4.9. Definíció (külső deriválás)**.** *A 4.8 Tétel szerint egyértelműen létező* $\mathrm{d} : \Gamma(\Lambda^k T^*U) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} T^*U)$ *leképezéseket külső deriválásnak nevezzük.*

4.10. Példa. *Legyen* $U = \mathbb{R}^n$ *és* $x_1, \ldots, x_n$ *a koordinátafüggvények,* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *a parciális deriváltak mint vektormezők. A* $\mathrm{d}x_i$ *1-forma a* $\frac{\partial}{\partial x_j}$ *vektormezőn kiértékelve a* $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ *konstans függvényt adja.*

Legyen $f \in C^\infty(U)$ *sima függvény (azaz 0-forma). Ekkor*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i, \tag{4.8}$$

hiszen az $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ *vektormezőn kiértékelve*

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) (X). \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.11. Példa. *Legyen* $U = \mathbb{R}^2$*,* $x, y \in C^\infty(U)$ *a standard koordinátafüggvények. Ha* $\alpha = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$*, ahol* $f, g \in C^\infty(U)$*, akkor*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) \\ &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + f \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + g \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.12. Definíció (zárt, egzakt differenciálforma)**.** *Egy* α *differenciálforma zárt, ha* $\mathrm{d}\alpha = 0$ *és egzakt, ha létezik olyan* β *differenciálforma, amelyre* $\alpha = \mathrm{d}\beta$ *teljesül.*

A 4.9 definíció alapján minden egzakt differenciálforma zárt. A vektoranalízisben tanult differenciáloperátorok közötti ismert összefüggések ennek speciális esetei: egy függvény gradiensének rotációja 0, egy vektormező rotációjának divergenciája 0.

4.13. Tétel (Poincaré-lemma)**.** *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ csillagszerű, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$ zárt. Ekkor α egzakt*

Bizonyítás. [FoM, 2.4.17] □

4.14. Állítás. *Legyen $f : U \to V$ sima leképezés, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*V)$. Ekkor $f^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(f^*\alpha)$.*

Bizonyítás. [FoM, 2.4.9] □

4.15. Definíció (Lie-derivált)**.** *Legyen X teljes vektormező, a folyama F. Az α differenciálforma Lie-deriváltja az X vektormező mentén*

$$\mathcal{L}_X\alpha := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_t^*\alpha\Big|_{t=0}. \tag{4.11}$$

Az egyszerűség kedvéért a definícióban teljes vektormező szerepel, ekkor az F folyam valóban létezik. Ha X nem teljes, akkor lokális folyamok segítségével hasonló módon értelmezhető a Lie-derivált.

4.16. Állítás. *Legyen X vektormező, α differenciálforma. Ekkor $\mathcal{L}_X\alpha = \mathrm{d}\mathbf{i}_X\alpha + \mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\alpha$.*

Bizonyítás. [FoM, 2.4.13 (iv)] □

Ebből az összefüggésből is látszik, hogy $\mathcal{L}_X$ 0 fokú deriváció, mivel egy 1 és egy -1 fokú deriváció fokszámozott kommutátora.

4.17. Definíció (invariáns differenciálforma)**.** *Egy $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^*U)$ differenciálforma az $X \in \Gamma(TU)$ vektormezőre nézve invariáns, ha $\mathcal{L}_X\alpha = 0$.*

Ha az X vektormező teljes, akkor a 4.15 Definíció alapján α pontosan akkor invariáns az X vektormezőre, ha $\forall t : F_t^*\alpha = \alpha$, ahol F az X vektormező folyama.

4.18. Állítás. *Legyen X vektormező, α, β invariáns differenciálformák. Ekkor $\alpha \wedge \beta$, $\mathrm{d}\alpha$ és $\mathbf{i}_X\alpha$ is invariáns differenciálformák.*

Bizonyítás. Az állítás az alábbi azonosságok következménye:

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta) \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\mathrm{d}\alpha) &= \mathrm{d}\mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\alpha + \mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \mathrm{d}\,\mathrm{d}\mathbf{i}_X\alpha + \mathrm{d}\mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\mathcal{L}_X(\alpha) \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\mathbf{i}_X\alpha) &= \mathrm{d}\mathbf{i}_X\mathbf{i}_X\alpha + \mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\mathbf{i}_X\alpha \\
&= \mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\mathbf{i}_X\alpha + \mathbf{i}_X\mathbf{i}_X\,\mathrm{d}\alpha = \mathbf{i}_X\mathcal{L}_X(\alpha).
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

□

4.3. Görbevonalú koordináták

Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt. Korábban a koordinátafüggvények $x_1, \dots, x_n : U \to \mathbb{R}$ megszorításai segítségével az érintő- és koérintőterek egy-egy bázisát adtuk meg, a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vektormezők és az $\mathrm{d}x_i$ 1-formák értékeit. Ezek duális bázisok, azaz $\mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ minden pontban.

Ha a Descartes-koordináták helyett más, akár görbevonalú koordinátarendszert szeretnénk használni, akkor hasznos, ha a fenti tulajdonságok érvényben maradnak.

4.19. Állítás. *Legyenek $q_1, \dots, q_n \in C^\infty(U)$. A következők ekvivalensek tetszőleges $x \in U$ pontban:*

(i) Az $x \mapsto (q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$ leképezés Jacobi-determinánsa nem 0.

(ii) $\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, \dots, \mathrm{d}q_n$ *a T_x^*U bázisa*

(iii) $\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q_n \neq 0$.

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy

$$
\mathrm{d}q_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \tag{4.15}
$$

és hogy a $\mathrm{d}x_j$ kovektorok lineárisan függetlenek. Emiatt $\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, \dots, \mathrm{d}q_n$ pontosan akkor lineárisan független (és ekkor bázis, hiszen $\dim T_x^*U = n$), ha az együtthatómátrix invertálható. Az együtthatómátrix

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_2}{\partial x_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \frac{\partial q_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}, \tag{4.16}
$$

ennek determinánsa éppen a J Jacobi-determináns. Másrészt

$$
\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q_n = J\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n, \tag{4.17}
$$

és $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n \neq 0$, így a harmadik feltétel is ekvivalens. □

Mivel a Jacobi-determináns folytonos és az eltűnése zárt feltétel, ha egy pontban $q_1, \dots, q_n$ teljesíti a fenti ekvivivalens feltételeket, akkor annak egy környezetében is teljesíti.

Speciálisan ha $x \mapsto (q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x))$ diffeomorfizmus U és a képe között, akkor teljesülnek a 4.19 állítás feltételei, tehát $\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, \dots, \mathrm{d}q_n$ minden pontban bázist alkot. Ilyenkor ennek duális bázisát $\frac{\partial}{\partial q_i}$ módon szokás jelölni, a parciális deriváltakkal kifejezve

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{4.18}$$

ahol a $(\frac{\partial x_j}{\partial q_i})_{i,j=1}^n$ mátrix a $(\frac{\partial q_i}{\partial x_j})_{i,j=1}^n$ mátrix inverze. Fontos azonban észrevenni, hogy míg egy sima f függvénynek mindig képezhetjük a $\mathrm{d}f$ külső deriváltját, a $\frac{\partial}{\partial f}$ szimbólumnak csak akkor van értelme, ha megmondjuk, hogy melyik lokális koordinátarendszer koordinátafüggvényeinek egyikeként tekintjük, mivel éppen a megfelelő koordinátavonal (tehát aminek a többi koordinátája állandó) érintőjét jelöli.

4.20. Példa. *Legyen $U = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, x, y a szokásos koordinátafüggvények, $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ és $\varphi(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$. Ekkor*

$$\mathrm{d}r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}y \tag{4.19}$$

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y, \tag{4.20}$$

és így

$$\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{4.21}$$

tehát $\mathrm{d}r$ és $\mathrm{d}\varphi$ mindenhol bázist alkot. A duális bázis

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.23}$$

Például

$$\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial r}} \mathrm{d}r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1. \tag{4.24}$$

A görbevonalú koordinátákból képzett vektorok és kovektorok segítségével az érintő- és koérintőnyalábon is bevezethetünk koordinátákat. Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $q_1, \dots, q_n \in C^\infty(Q)$ olyanok, hogy $x \mapsto (q_1(x), \dots, q_n(x))$ diffeomorfizmus Q és a képe között. Ha $v \in T_x Q$, akkor egyértelműen felírható

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial q_i}(x) \tag{4.25}$$

alakban, ahol $v_i \in \mathbb{R}$. Jelölje $\dot{q}_i : TQ \to \mathbb{R}$ azt a leképezést, amely a v vektorhoz az általa meghatározott v_i számot rendeli. Ekkor $\dot{q}_i \in C^\infty(TQ)$ és $q_1 \circ \tau_Q, \ldots, q_n \circ \tau_Q, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ görbevonalú koordinátarendszert határoz meg a $TQ \subseteq T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ nyílt halmazon.

Hasonlóan, ha $\alpha \in T_x^*Q$, akkor egyértelműen felírható

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathrm{d}q_i)(x) \tag{4.26}$$

alakban, ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Jelölje $p_i : T^*Q \to \mathbb{R}$ azt a leképezést, amely az α kovektorhoz az általa meghatározott α_i számot rendeli. Ekkor $p_i \in C^\infty(TQ)$ és $q_1 \circ \tau_Q^*, \ldots, q_n \circ \tau_Q^*, p_1, \ldots, p_n$ görbevonalú koordinátarendszert határoz meg a $T^*Q \subseteq T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ nyílt halmazon.

Ha nem okoz félreértést, az indukált koordinátarendszer használatakor a $q_i \circ \tau_Q$ és $q_i \circ \tau_Q^*$ kompozíciók helyett gyakran csak a q_i jelölést használjuk.

5. Lagrange-rendszerek

5.1. Lagrange-mechanika érintőnyalábon

Legyen $L : TQ \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ha $\gamma : [t_1, t_2] \to Q$ sima leképezés (görbe), akkor deriváltja $\dot{\gamma} : [t_1, t_2] \to TQ$ az a leképezés, amelynek t_0 pontban felvett értéke $[\gamma \circ s_{t_0}]_{\gamma(t_0)}$, ahol $s_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $t \mapsto t + t_0$ leképezés. Az L Lagrange-függvényhez tartozó hatást

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\gamma}(t))\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

definiálja.

Ha Q egy koordinátarendszere $q_1, \ldots, q_n$, akkor tekinthetjük az érintőnyalábon indukált $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ koordinátákat. Azonosítsuk az L Lagrange-függvényt ezek segítségével egy $2n$-változós függvénnyel, a γ görbét a $\gamma_i = q_i \circ \gamma$ komponensfüggvényekkel, a $\dot{\gamma}$ deriváltat pedig a $q_1 \circ \dot{\gamma}, \ldots, q_n \circ \dot{\gamma}, \dot{q}_1 \circ \dot{\gamma}, \ldots, \dot{q}_2 \circ \dot{\gamma}$ komponensekkel. Ekkor $\gamma_i = q_i \circ \gamma = q_i \circ \dot{\gamma}$ (itt q_i kétféle értelemben szerepel, éppen az egyenlőség miatt tekinthetünk el a kettő közötti különbségtől), és $\dot{\gamma}_i(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_i(t) = (\dot{q}_i \circ \dot{\gamma})(t)$. A hatás így részletesen felírva

$$S[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), \dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t))\,\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

5.2. Geodetikusok

5.1. Definíció (Riemann-metrika)**.** *Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt. Egy $g \in \Gamma(T_2(TQ))$ tenzormező Riemann-metrika, ha minden pontban szimmetrikus és pozitív definit.*

Ha $q_1, \ldots, q_n$ egy koordinátarendszer, akkor g felírható

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}q_j \tag{5.3}$$

alakban, ahol $g_{ij} \in C^\infty(Q)$. A szimmetria azt jelenti, hogy $g_{ij} = g_{ji}$ minden i, j esetén, a pozitivitás pedig azt, hogy minden $x \in Q$ esetén a $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ mátrix pozitív definit.

5.2. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_n$ a standard koordinátafüggvények. Az euklideszi metrika*

$$g = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i. \tag{5.4}$$

5.3. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, x, y a standard koordinátafüggvények. Q a*

$$g = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y \tag{5.5}$$

Riemann-metrikával ellátva a hiperbolikus sík Poincaré-féle félsík modellje.

Ha adott egy Riemann-metrika, akkor értelmes érintővektorok skaláris szorzatáról illetve hosszáról beszélni. A skaláris szorzat a Q téren haladva simán változik: ha $X, Y \in \Gamma(TQ)$, akkor felírhatóak

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{5.6}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{5.7}$$

$$\tag{5.8}$$

alakban, ahol $X_i, Y_i \in C^\infty(Q)$, a (pontonkénti) skaláris szorzatuk pedig az

$$\langle X, Y \rangle_g := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X_i Y_j \tag{5.9}$$

sima függvény.

Az érintővektorok hossza segítségével értelmezzük egy görbe ívhosszát.

5.4. Definíció (ívhossz)**.** *Legyen g Riemann-metrika, $\gamma : [t_1, t_2] \to Q$ sima. A γ görbe ívhossza*

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\,\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

Ha $q_1, \ldots, q_n$ koordinátarendszer, $q_i \circ \gamma = \gamma_i$ és g az (5.3) alakú, akkor a görbe ívhossza

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{5.11}$$

(5.10) éppen a $\sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle_q}$ Lagrange-függvényhez tartozó hatás. Az a célunk, hogy jobban megértsük az ívhossz stacionárius pontjait. Az (5.10) integrál közvetlen variálásából kapott Euler–Lagrange-egyenletek hosszas számolásra vezetnek. Ehelyett vezessük be az $K = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle_g$ jelölést, azaz legyen

$$K(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{5.12}$$

A $\sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle_q}$ hatáshoz tartozó Euler–Lagrange-egyenlet

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle_q}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \sqrt{\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle_q}}{\partial \dot{q}_k} \\
&= \frac{\frac{\partial K}{\partial q_k}}{\sqrt{2K}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}}{\sqrt{2K}} \\
&= \frac{\frac{\partial K}{\partial q_k}}{\sqrt{2K}} - \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}}{\sqrt{2K}} + \frac{\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K}{(2K)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2K}}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\sqrt{2K}\right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ezen a ponton két dolgot érdemes észrevenni. Az első, hogy az ívhossz nem változik meg γ sima átparaméterezésétől (persze a végpontoknak megfelelő t_1, t_2 értékek általában megváltoznak). A második, hogy amennyiben áttérünk ívhossz szerinti (azaz állandó sebességű) paraméterezésre, akkor (5.13) utolsó tagja eltűnik, hiszen $\sqrt{2K}$ a pillanatnyi sebesség nagysága. A megmaradó tagok viszont éppen az K függvényhez mint Lagrange-függvényhez tartozó Euler–Lagrange-egyenletet adják.

Mostantól tehát tekintsük az $L = K$ Lagrange-függvényt. Az Euler–Lagrange-egyenletek koordinátákkal a következők:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj}(q)\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q)\dot{q}_i\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j\right) - \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q)\ddot{q}_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}(q) - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i}(q) - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}(q)\right)\dot{q}_i\dot{q}_j - \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q)\ddot{q}_i.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ez a második deriváltakra nézve lineáris egyenletrendszer. Mivel g pozitív definit, az együtthatómátrix invertálható, és a megoldás az inverz segítségével kifejezhető.

5.5. Definíció (Christoffel-szimbólum, geodetikus)**.** *Legyen g Riemann-metrika a Q nyílt halmazon, $q_1, \ldots, q_n \in C^\infty(Q)$ koordinátarendszer és írjuk fel a Riemann-metrikát*

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}q_j \tag{5.15}$$

alakban, ahol $g_{ij} = g_{ji} \in C^\infty(U)$*. Jelölje a* $(g_{ij})_{i,j=1}^n$ *mátrix inverzének komponenseit* g^{ij}*. A komponensfüggvényekből képzett*

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n g^{hk}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \tag{5.16}$$

függvényeket a Riemann-metrika ezen koordinátarendszerre vonatkozó Christoffel-szimbólumainak nevezzük.

Egy γ *görbét* $(\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_k(t)))$ *geodetikusnak nevezünk, ha komponensfüggvényeire teljesül a*

$$\ddot{\gamma}_h(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^h(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t) = 0 \tag{5.17}$$

geodetikus egyenlet.

Tehát azt láttuk be, hogy a geodetikusok egyrészt az ívhossz funkcionál stacionárius pontjainak egyenletes sebességű paraméterezései, másrészt a $K(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_g$ Lagrange-függvényhez tartozó hatás stacionárius pontjai.

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor $Q = \mathbb{R}^n$ és $g = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$ az euklideszi metrika. Itt az egyenesek egyrészt minimalizálják az ívhosszt, másrészt a szabad tömegpont pályáját is adják. A geodetikusok mindkét értelemben általánosítják az egyenes fogalmát tetszőleges Riemann-metrika esetére.

5.3. Egyszerű mechanikai rendszerek

Korábban láttuk, hogy az $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ Lagrange-függvényből származó Euler–Lagrange-egyenletek a szabadon mozgó tömegpont(rendszer) mozgásegyenletei, ha viszont a tömegpontok egy V potenciál szerinti konzervatív erőtérben mozognak, akkor a Lagrange-függvény az $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q)$ kifejezésre módosul. Az előző szakasz mintájára tekintsünk most általánosabb alakú kinetikus energia tagokat.

5.6. Definíció (egyszerű mechanikai rendszer)**.** *Legyen* g *Riemann-metrika a* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt halmazon,* $V \in C^\infty(Q)$*. Az egyszerű mechanikai rendszer Lagrange-függvényének nevezzük az* $L = K_g - V \circ \tau_Q \in C^\infty(TQ)$ *függvényt, ahol* $K_g(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_g$*.*

(5.14) mintájára meggondolható, hogy az egyszerű mechanikai rendszer Euler–Lagrange-egyenlete

$$\ddot{\gamma}_h(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^h(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t) = -\sum_{k=1}^n g^{hk}(\gamma(t))\frac{\partial V}{\partial q_k}(\gamma(t)). \tag{5.18}$$

5.7. Példa. *Tekintsünk az $\mathbb{R}^3$ térben n darab tömegpontot $m_1, \dots, m_n$ tömegekkel, amelyek a $V \in C^\infty((\mathbb{R}^3)^n)$ potenciál hatása alatt mozognak (1.1 és 1.3 definíciók). A mozgásegyenlet tekinthető egy egyszerű mechanikai rendszer Euler–Lagrange-egyenletének a következő módon. Legyen $Q = (\mathbb{R}^3)^n$, a koordinátafüggvények $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, a Riemann-metrika*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}y_i \otimes \mathrm{d}y_i + \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_i). \tag{5.19}$$

Ekkor az összes Christoffel-szimbólum 0, tehát az egyenletrendszer egyszerűsödik:

$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{5.20}$$

$$\ddot{y}_i = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial y_i} \tag{5.21}$$

$$\ddot{z}_i = -\frac{1}{m_i}\frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{5.22}$$

A differenciálformákhoz hasonlóan Riemann-metrikát is vissza lehet húzni. Ha $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt, $f : U \to V$ sima és g Riemann-metrika V felett, akkor az $f^*g \in \Gamma(T_2(TQ))$ az a tenzormező, amelyre $v, w \in T_x$ esetén

$$\langle v, w \rangle_{f^*g} = \langle T_x f(v), T_x f(w) \rangle_g. \tag{5.23}$$

f^*g pontossan akkor Riemann-metrika, ha f immerzió, azaz minden $x \in U$ esetén $T_x f$ injektív.

Ha g úgy van felírva mint 0-és 1-formák tenzorszorzatainak összege, akkor a visszahúzott metrika felírásához felhasználhatjuk, hogy a visszahúzás kommutál a tenzorszorzással és a külső deriválással.

5.8. Példa. *Legyen $U = V = \mathbb{R}^2$, a standard koordinátafüggvényeket jelölje $r, \varphi : U \to \mathbb{R}$, $x, y : V \to \mathbb{R}$. Legyen $g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$ az euklideszi Riemann-metrika V-n, $f : (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. A visszahúzott Riemann-metrika*

$$\begin{aligned}
f^*g &= f^*(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y) \\
&= \mathrm{d}(f^*x) \otimes \mathrm{d}(f^*x) + \mathrm{d}(f^*y) \otimes \mathrm{d}(f^*y) \\
&= \mathrm{d}(r\cos\varphi) \otimes \mathrm{d}(r\cos\varphi) + \mathrm{d}(r\sin\varphi) \otimes \mathrm{d}(r\sin\varphi) \\
&= ((\mathrm{d}r)\cos\varphi - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \otimes ((\mathrm{d}r)\cos\varphi - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \\
&\qquad + ((\mathrm{d}r)\sin\varphi + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \otimes ((\mathrm{d}r)\sin\varphi + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \\
&= \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2\,\mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ha f diffeomorfizmus két nyílt halmaz között, akkor korábban láttuk, hogy az $L \rightsquigarrow L \circ Tf$ transzformációval kapott új Lagrange-függvényre úgy is gondolhatunk, mint az eredeti variációs feladat új görbevonalú koordinátarendszerbe való átírására. Ha L a (g, V) párhoz tartozó egyszerű mechanikai rendszer Lagrange-függvénye, akkor az ilyen módon transzformált Lagrange-függvény szintén az egyszerű mechanikai rendszer, ami az (f^*g, f^*V) párhoz tartozik.

Visszahúzni azonban nem csak diffeomorfizmus mentén lehet, ami lehetőséget ad holonom kényszerek modellezésére. Holonom kényszererőnek nevezzük az olyan erőt, ami a koordináták között fennálló valamely egyenlet állandó teljesülését biztosítja. Például egy l hosszú merev rúd egyik vége legyen az origóhoz rögzítve olyan módon, hogy körülötte szabadon elfordulhat, a másik végéhez pedig rögzítsünk egy tömegpontot. Ekkor a tömegpont x, y, z koordinátáira minden pillanatban az $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ egyenlet teljesül, az ehhez szükséges erőt – amely a pillanatnyi helyzettől, sebességtől és az esetleg fellépő további erőktől függ – a rúd biztosítja.

A holonom kényszer fogalma idealizáció, tehát nem meglepő, hogy ebben a formában nem fér bele a Newton-egyenlet 1.1 definícióban megadott alakjába. Ugyanakkor előállítható konzervatív erők limeszeként a következő módon. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sima függvény, amivel a kényszeregyenletek $\varphi(q) = 0$ alakba írhatóak. Ha a kényszererő nélküli rendszer Lagrange-függvénye $L_0(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$ alakú, akkor tekinthetjük az $L_\alpha(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - (V(q) + \alpha|\varphi(q)|^2)$ rendszereket, ahol α valós paraméter. α növelésével megnő az energiája minden olyan konfigurációnak, amire nem teljesül a kényszerfeltétel. Ha a kezdeti feltétel olyan, hogy $\varphi(q_0) = 0$, akkor megmutatható, hogy $\alpha \to \infty$ esetén létezik a mozgásnak határértéke és az mindvégig teljesíti a kényszerfeltételt (az utóbbi az energiamegmaradásból következik) [Arnold, II.4.17.A].

Ha csak az $\alpha \to \infty$ határesetet szeretnénk megérteni, akkor a következőképp járunk el. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ nyílt és válasszunk olyan $f : U \to \mathbb{R}^n$ sima függvényt, amelyre $\varphi \circ f = 0$ és Tf rangja minden pontban $n - m$ (hogy ezt biztosan megtehessük, tegyük fel, hogy $T_x\varphi$ rangja m minden $x \in \varphi^{-1}(0)$ pontban). Legyen g az euklideszi Riemann-metrika a $\mathbb{R}^n$ téren, vagy az 5.7 példában szereplő általánosabb változat. Ekkor f a kényszerfelület egy paraméterezése és az (f^*g, f^*V) párhoz tartozó egyszerű mechanikai rendszer írja le az azon megvalósuló mozgást.

5.9. Példa. *Tekintsük az euklideszi síkon a $V = mg_0y$ potenciál és az $x^2 + y^2 = l^2$ kényszerfeltétel hatására mozgó m tömegű pontot (síkinga). Legyen $U = \mathbb{R}$ koordinátafüggvénye φ, $f(\varphi) = (l \sin\varphi, -l\cos\varphi)$ a kényszerfelület paraméterezése (azaz φ a függőlegessel bezárt szög). Ekkor $(f^*V)(\varphi) = (V \circ$*

f)(φ) $= -mg_0 l\cos\varphi$ *és*

$$\begin{aligned} f^*g &= f^*(m\,\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x + m\,\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y) \\ &= m\,\mathrm{d}(f^*x)\otimes\mathrm{d}(f^*x) + m\,\mathrm{d}(f^*y)\otimes\mathrm{d}(f^*y) \\ &= m\,\mathrm{d}(l\sin\varphi)\otimes\mathrm{d}(l\sin\varphi) + m\,\mathrm{d}(-l\cos\varphi)\otimes\mathrm{d}(-l\cos\varphi) \\ &= m(l\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)\otimes(l\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) + m(l\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi)\otimes(l\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \\ &= ml^2\,\mathrm{d}\varphi\otimes\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Az Euler–Lagrange-egyenlet

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g_0}{l}\sin\varphi. \tag{5.26}$$

6. Hamilton-rendszerek

6.1. Legendre-transzformáció

6.1. Definíció (Legendre-transzformált)**.** *Legyen V valós vektortér, $U \subseteq V$ konvex, $f \in C^2(U)$ szigorúan konvex. Ha $\varphi \in V^*$, akkor tekintsük azt az $x_\varphi \in V$ vektort, ahol $\mathrm{d}f(x_\varphi) = \varphi$ (ha van ilyen). A $g(\varphi) = \varphi(x_\varphi) - f(x_\varphi)$ módon definiált függvényt f Legendre-transzformáltjának nevezzük (g értelmezési tartománya V^* azon részhalmaza, ahol x_φ értelmes).*

6.2. Példa. *Legyen $V = \mathbb{R} \simeq V^*$, $U = [0, \infty)$, $f(x) = \frac{x^p}{p}$ valamely $p > 1$ valós paraméterrel. Ekkor $f'(x) = x^{p-1}$, tehát $x_\varphi = \sqrt[p-1]{\varphi}$ és*

$$g(\varphi) = \varphi \sqrt[p-1]{\varphi} - \frac{1}{p}(\sqrt[p-1]{\varphi})^p = (1 - \frac{1}{p})\varphi^{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{\varphi^q}{q}, \tag{6.1}$$

ahol $1/p + 1/q = 1$.

6.3. Példa. *Legyen $V = \mathbb{R} \simeq V^*$, $U = V$, $f(x) = \frac{m}{2}x^2$ valamely $m > 0$ valós paraméterrel. Ekkor $f'(x) = mx$, tehát $x_\varphi = \varphi/m$ és*

$$g(\varphi) = \frac{\varphi^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{\varphi}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}\varphi^2. \tag{6.2}$$

6.4. Megjegyzés. *Egy $f : V \to \mathbb{R}$ konvex függvény konjugáltja az az $f^* : V^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ függvény, amit*

$$f^*(\varphi) = \sup_{x \in V} \varphi(x) - f(x) \tag{6.3}$$

definiál. Ha $f \in C^2(V)$ szigorúan konvex, akkor a konvex konjugáltja megegyezik a Legendre-transzformáltjával.

Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $L \in C^\infty(TQ) \simeq Q \times \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy minden $q \in Q$ esetén az $L(q, \cdot) : T_xQ \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan konvex és a deriváltja szürjektív (például egyszerű mechanikai rendszereknél ez mindig teljesül). Ekkor az q változót paraméternek tekintve pontonként képezhetjük L Legendre-transzformáltját, tehát egy-egy $T_x^*Q \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyek egy $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ sima függvény megszorításai. Az így kapott függvényt Hamilton-függvénynek nevezzük.

6.5. Példa (egyszerű mechanikai rendszer Hamilton-függvénye)**.** *Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $g \in \Gamma(T_2(TQ))$ Riemann-metrika, $V \in C^\infty(Q)$, és tekintsük az $L = K_g - V \circ \tau_Q$ Lagrange-függvényt. Koordinátákkal kifejezve*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q_1, \dots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q_1, \dots, q_n), \tag{6.4}$$

tehát

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} g_{ki}(q)\dot{q}_i. \tag{6.5}$$

Legyen $p \in T_q^*Q \simeq \mathbb{R}^n$. *A* $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ *egyenletrendszer megoldását írjuk fel az* g^{ij} *inverz mátrix segítségével:*

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \sum_{k,i=1}^{n} g^{jk}(q) g_{ki}(q)\dot{q}_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} g^{jk}(q) p_k. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ezek alapján a Hamilton-függvény koordinátákkal kifejezve

$$\begin{aligned} H(q,p) &= p(\dot{q}(q,p)) - L(q,\dot{q}(q,p)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(q)p_k - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q) \sum_{l=1}^{n} g^{il}(q)p_l \sum_{k=1}^{n} g^{jk}(q)p_k + V(q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(q)p_k - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=1}^{n} g^{jk}(q)p_k + V(q) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(q)p_i p_j + V(q). \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.6. Tétel. *Legyen* $L \in C^\infty(TQ)$ *minden fibrumon szigorúan konvex és* $H \in C^\infty(T^*Q)$ *a Legendre-transzformáltja. Ekkor az Euler–Lagrange-egyenletek ekvivalensek az*

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{6.8}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{6.9}$$

egyenletrendszerrel (Hamilton-egyenlet).

Bizonyítás. Legyen a $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ egyenletrendszer megoldása ($\dot{q}$ változóval) $\dot{q}(q,p)$, ekkor $H(q,p) = p\dot{q}(q,p) - L(q,\dot{q}(q,p))$.

Tegyük fel, hogy $t \mapsto q(t)$ megoldja az Euler–Lagrange-egyenleteket. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k \end{aligned} \tag{6.10}$$

és

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k(q,p) + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k(q,p). \tag{6.11}$$

□

6.7. Példa. *Legyen* $Q = \mathbb{R}$, T^*Q *koordinátafüggvényei* q, p, $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$ *(egyszerű mechanikai rendszer egy dimenzióban). Ekkor a Hamilton-egyenletek*

$$\dot{p} = -V'(q) \tag{6.12}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \tag{6.13}$$

ami ekvivalens az $m\ddot{q} = -V'(q)$ *Newton-egyenlettel.*

6.2. Szimplektikus formák

6.8. Definíció (szimplektikus forma, szimplektikus leképezés)**.** $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ *szimplektikus forma, ha* $\mathrm{d}\omega = 0$ *és* ω *minden pontban nemelfajuló.*

Legyenek $\omega_1 \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U_1)$ *és* $\omega_2 \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U_2)$ *szimplektikus formák. Egy* $\varphi : U_1 \to U_2$ *sima leképezés szimplektikus, ha* $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$.

6.9. Példa. *Legyen* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *és* $U = T^*Q$. *Legyen* $\theta_0 \in \Gamma(T^*U)$ *a kanonikus 1-forma, tehát ami a* $(q, p, \dot{q}, \dot{p}) \in TT^*U \simeq U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *érintővektorhoz a* $p(\dot{q})$ *számot rendeli. Ekkor* $-\,\mathrm{d}\theta_0$ *szimplektikus forma, a* T^*Q *kanonikus szimplektikus formája.*

A $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n \in C^\infty(T^*Q)$ *koordinátafüggvényekkel kifejezve* $\theta_0 = \sum_{i=1}^n p_i \,\mathrm{d}q_i$ *és így*

$$\begin{aligned}\omega &= -\,\mathrm{d}\theta_0 \\ &= -\sum_{i=1}^n \mathrm{d}(p_i\,\mathrm{d}q_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n (\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i + p_i \wedge \mathrm{d}\,\mathrm{d}q_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Ha $Q = \mathbb{R}^n$, *akkor* $T^*Q \simeq \mathbb{R}^{2n}$, *a kanonikus szimplektikus formát ekkor* $\mathbb{R}^{2n}$ *standard szimplektikus formájának is nevezzük.*

6.10. Állítás. *Legyen* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *nyílt és* $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ *nemelfajuló forma. Ekkor* m *páros és* $\omega^{m/2}$ *térfogati forma (azaz sehol sem* 0*).*

Bizonyítás. [FoM, 3.1.3] □

A szimplektikus formához tartozó térfogati forma szokásos normálása a következő:

$$\Omega_\omega = \frac{1}{(m/2)!}\omega^{m/2}. \tag{6.15}$$

A nemelfajuló 2-formákat majdnem szimplektikus formának is nevezik.

6.11. Tétel (Darboux)**.** *Legyen $U \subseteq 2n$ és $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^* U)$ szimplektikus forma. Ekkor minden $x \in U$ ponthoz létezik olyan $V \subseteq U$ nyílt környezet ($x \in V$) és azon $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n \in C^\infty(V)$ görbevonalú koordináták, amelyekkel kifejezve*

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i. \tag{6.16}$$

Bizonyítás. [FoM, 3.2.2] □

A tételben szereplő tulajdonságú lokális koordinátarendszereket kanonikus koordinátáknak nevezzük.

6.3. Hamilton-vektormezők

6.12. Definíció (Hamilton-vektormező)**.** *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ nyílt halmaz, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^* U)$ szimplektikus forma és $H \in C^\infty(U)$. A H Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormezőnek nevezzük azt az egyértelmű $X_H \in \Gamma(TU)$ vektormezőt, amelyre $\mathbf{i}_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$ teljesül.*

6.13. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}$, $U = T^*Q$, $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$ a kanonikus szimplektikus forma, $V \in C^\infty(Q)$ és $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$. Ekkor*

$$\mathrm{d}H = \frac{1}{m} p \,\mathrm{d}p + V'(q)\,\mathrm{d}q \tag{6.17}$$

és

$$\mathbf{i}_{A\frac{\partial}{\partial q} + B\frac{\partial}{\partial p}}\omega = A\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial q}}(\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p) + B\mathbf{i}_{\frac{\partial}{\partial p}}(\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p) = A\,\mathrm{d}p - B\,\mathrm{d}q, \tag{6.18}$$

tehát az $\mathbf{i}_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$ feltétel alapján a Hamilton-vektormező

$$X_H = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q} - V'(q)\frac{\partial}{\partial p}. \tag{6.19}$$

A differenciálegyenlet-rendszer szokásos felírása

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t) = \frac{p(t)}{m} \tag{6.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = -V'(q(t)). \tag{6.21}$$

A fenti példához hasonlóan általánosan is felírhatjuk a kanonikus szimplektikus formával képzett Hamilton-vektormezőket differenciálegyenlet alakban. Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i \in \Gamma(\Lambda^2 T^*(T^*Q))$ és $H \in C^\infty(T^*Q)$. Ekkor

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i \right) = \mathbf{i}_{X_H} \omega \tag{6.22}$$

alapján

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \tag{6.23}$$

tehát a differenciálegyenlet alak

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{6.24}$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \tag{6.25}$$

vagyis éppen a Hamilton-egyenletrendszer.

6.14. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ nyílt halmaz, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^* U)$ szimplektikus forma és $H \in C^\infty(U)$. Ekkor H és ω az X_H Hamilton-vektormezőre nézve invariáns differenciálformák.*

Bizonyítás.

$$\mathcal{L}_{X_H} H = \mathbf{i}_{X_H} \mathrm{d}H = \mathbf{i}_{X_H} \mathbf{i}_{X_H} \omega = 0, \tag{6.26}$$

mivel $\mathbf{i}_{X_H} \mathbf{i}_{X_H} = 0$.

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = \mathrm{d} \underbrace{\mathbf{i}_{X_H} \omega}_{\mathrm{d}H} + \mathbf{i}_{X_H} \underbrace{\mathrm{d}\omega}_{0} = 0, \tag{6.27}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ és hogy ω szimplektikus forma, tehát $\mathrm{d}\omega = 0$. ☐

Mivel egy adott vektormezőre nézve invariáns differenciálformák részalgebrát alkotnak (4.18 Állítás), a 6.14 tételből azonnal következik Liouville-tétele:

6.15. Következmény (Liouville-tétel)**.** *Ω_ω invariáns térfogati forma bármely Hamilton-vektormezőre nézve.*

6.16. Megjegyzés. *H bármely függvénye is invariáns, tehát $\beta \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-\beta H} \Omega_\omega$ is invariáns térfogat. Ha $Z(\beta) = \int_U e^{-\beta H} \Omega_\omega$ véges, akkor $\frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H} \Omega_\omega$ valószínűségi mértéket határoz meg, a $T = \frac{1}{\beta}$ hőmérséklethez tartozó Gibbs-mértéket.*

6.4. Poisson-zárójel

6.17. Definíció. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma. Az $f, g \in C^\infty(U)$ függvények Poisson-zárójele $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$.*

Ha $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ kanonikus koordinátafüggvények (tehát $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$), akkor a Poisson-zárójel a 6.23 egyenlet szerint a parciális deriváltakkal az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{6.28}$$

6.18. Példa. *A $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ kanonikus koordinátafüggvények Poisson-zárójelei*

$$\{q_i, q_j\} = 0 \tag{6.29}$$
$$\{p_i, p_j\} = 0 \tag{6.30}$$
$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{6.31}$$

6.19. Állítás. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma. Ekkor*

(i) $\{f, g\} = -\mathcal{L}_{X_f} g = \mathcal{L}_{X_g} f$

(ii) $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$

(iii) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$

Bizonyítás. [FoM, 3.3.11], [FoM, 3.3.17] és [FoM, 3.3.18] □

6.20. Állítás. *Legyen H, f sima, $\gamma : \mathbb{R} \to U$ az X_H integrálgörbéje. Ekkor*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = \{f, H\}(\gamma(t)). \tag{6.32}$$

Bizonyítás. [FoM, 3.3.15] □

7. Lie-csoportok és sima hatásaik

7.1. Mátrix Lie-csoportok

7.1. Definíció (mátrix Lie-csoport, mátrix Lie-algebra, mátrix Lie-csoport Lie-algebrája)**.** *Legyen n pozitív egész.* $\mathrm{GL}(n)$ *jelöli a* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *invertálható lineáris transzformációk csoportját,* $\mathfrak{gl}(n)$ *pedig a* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineáris leképezések Lie-algebráját az* $[X, Y] = XY - YX$ *(kommutátor, Lie-szorzás) művelettel. A csoport egységelemét (identitás leképezés) e jelöli.*

G mátrix Lie-csoport, ha $\mathrm{GL}(n)$ *zárt részcsoportja valamely alkalmas n mellett. $\mathfrak{g}$ mátrix Lie-algebra, ha* $\mathfrak{gl}(n)$ *Lie-részalgebrája (azaz lineáris altér, amely a kommutátorra nézve zárt) valamely alkalmas n mellett.*

A G mátrix Lie-csoport T_eG Lie-algebrája a G-ben haladó e pontbeli lokális görbék ekvivalenciaosztályainak tere.

7.2. Példa. *A speciális lineáris csoport és Lie-algebrája*

$$\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n) | \det A = 1\} \tag{7.1}$$

$$T_e \, \mathrm{SL}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) | \mathrm{Tr}\, X = 0\} . \tag{7.2}$$

Ha ugyanis $t \mapsto A(t)$ egy olyan sima görbe, ami a $\mathrm{GL}(n)$ *csoportban halad, akkor*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det A(t) = \mathrm{Tr}\left(A^{-1}(t)A'(t)\right) \det A(t), \tag{7.3}$$

tehát egy e pontbeli és konstans 1 determinánsú lokális görbe deriváltjára $0 = \mathrm{Tr}\, A'(0)$ *teljesül. Másrészt ha* $\mathrm{Tr}\, X = 0$*, akkor* $t \mapsto \exp tX$ *determinánsa* $\det(\exp tX) = \exp(\mathrm{Tr}\, tX) = 1$ *és deriváltja a $t = 0$ pontban X.*

Az ortogonális csoport és Lie-algebrája

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in \mathrm{GL}(n) | \forall v, w \in \mathbb{R}^n : \langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle\} \\ &= \left\{A \in \mathrm{GL}(n) \middle| A^T A = e\right\} \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} T_e \, \mathrm{O}(n) &= \{X \in \mathfrak{gl}(n) | \forall v, w \in \mathbb{R}^n : \langle Av, w\rangle + \langle v, Aw\rangle = 0\} \\ &= \left\{X \in \mathfrak{gl}(n) \middle| A^T + A = 0\right\} . \end{aligned} \tag{7.5}$$

A speciális ortogonális csoport és Lie-algebrája

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n) \tag{7.6}$$

$$T_e \, \mathrm{SO}(n) = T_e \, \mathrm{O}(n) \cap T_e \, \mathrm{SL}(n). \tag{7.7}$$

A komplex általános lineáris csoport és Lie-algebrája

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(2n) | [A, J] = 0\} \tag{7.8}$$

$$T_e \, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n) | [A, J] = 0\} , \tag{7.9}$$

ahol $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ *és* J *az* i *képzetes egységgel való (komponensenkénti) szorzás.*

Az unitér csoport és Lie-algebrája

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \tag{7.10}$$

$$T_e\,\mathrm{U}(n) = T_e\,\mathrm{O}(2n) \cap T_e\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}). \tag{7.11}$$

A valós számok az összeadásra nézve csoportot alkotnak, ami mátrix Lie-csoportként is felfogható a következő módon:

$$\mathbb{R} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{GL}(2). \tag{7.12}$$

Ennek Lie-algebrája

$$T_e\mathbb{R} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathfrak{gl}(2). \tag{7.13}$$

A mátrix Lie-csoportok fenti definíciójából nem látszik egy fontos tulajdonság, mégpedig az, hogy differenciálható struktúrával rendelkeznek. Ez azt jelenti, hogy értelmezhető olyan leképezések differenciálhatósága, simasága, érintőleképezése, stb., amelyek értelmezési tartománya mátrix Lie-csoport. Ezt az teszi lehetővé, hogy a mátrix Lie-csoportok részsokaságok, emiatt egy definíció erejéig röviden kitérünk ezek általános fogalmára.

7.3. Definíció (részsokaság)**.** *Egy* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *részhalmaz részsokaság, ha minden* $x \in M$ *ponthoz létezik* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt környezet és* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ *sima leképezés, amely diffeomorfizmus* U *és a képe között,* $\varphi(x) = 0$ *és* $\varphi(M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m$ *valamely* $m \leq n$ *természetes számmal, ahol* $\mathbb{R}^m \leq \mathbb{R}^n$ *azon vektorokból áll, amelyek utolsó* $n - m$ *komponense* 0*.*

Egy M *részsokaság* $x \in M$ *pontbeli érintőtere az* M*-ben haladó* x*-beli lokális görbék ekvivalenciaosztályainak tere, amit* T_xM *jelöl.*

Például minden nyílt részhalmaz egyben részsokaság is, valamint $\mathbb{R}^n$ minden lineáris (vagy affin) altere is részsokaság. Egy $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ függvény grafikonja $\mathbb{R}^n$ részsokasága.

Belátható, hogy T_xM vektortér, dimenziója a definícióban szereplő m. Az érintőtér fogalmából kiindulva a vektormezőkről és differenciálformákról korábban látott definíciók és állítások jelentős része változtatás nélkül általánosítható részsokaságokra is.

7.4. Állítás. *Legyen* $G \subseteq \mathrm{GL}(n)$ *mátrix Lie-csoport. Ekkor*

(i) $G \subseteq \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ *részsokaság*

(ii) $T_eG \leq \mathfrak{gl}(n)$ *Lie-részalgebra*

(iii) $\exp(T_eG) \subseteq G$

(iv) $\exp$ *diffeomorfizmus* $0 \in T_eG$ *egy alkalmas* U *környezete és* $\exp(U)$ *között*

(v) az $\exp(T_eG)$ *által generált részcsoport a* G *egységelemet tartalmazó komponense*

Egy mátrix Lie-csoporton értelmezett leképezés differenciálhatóságát egyszerűbb módon (részsokaságok említése nélkül) is megfogalmazhatjuk: egy $f: G \to \mathbb{R}^m$ leképezés sima, ha minden $g \in G$ esetén az $f \circ L_g \circ \exp : T_eG \to \mathbb{R}^m$ (vektorterek közötti) leképezés sima, ahol $L_g : h \mapsto gh$ a csoport baleltolása.

7.2. Csoporthatások

7.5. Definíció (sima csoporthatás)**.** *Legyen* G *mátrix Lie-csoport,* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt részhalmaz (vagy részsokaság). Egy* $\Phi : G \times U \to U$*,* $(g, x) \mapsto \Phi_g(x)$ *leképezés a* G *csoport sima hatása, ha minden* $g, h \in G$ *és* $x \in U$ *esetén*

(i) $\Phi_e(x) = x$

(ii) $\Phi_{gh}(x) = \Phi_g(\Phi_h(x))$

(iii) az $(x, \xi) \mapsto \Phi_{\exp \xi}(x)$ *leképezés sima.*

7.6. Példa. *Legyen* $X \in \Gamma(TU)$ *teljes vektormező,* $F : \mathbb{R} \times U \to U$ *a folyama. Ekkor* F *az* $\mathbb{R}$ *(additív) csoport sima hatása. Megfordítva, ha* $F : \mathbb{R} \times U \to U$ *sima hatás, akkor*

$$X(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(x)\bigg|_{t=0} \tag{7.14}$$

teljes vektormező.

7.7. Definíció (infinitezimális generátor)**.** *Legyen* G *mátrix Lie-csoport,* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt,* $\Phi : G \times U \to U$ *sima csoporthatás. Vezessük be minden* $\xi \in T_eG$ *elemhez és* $x \in U$ *ponthoz a* $\gamma_{\xi,x}(t) = \Phi_{\exp t\xi}(x)$ *görbét. A* $\xi \in T_eG$ *elemhez tartozó infinitezimális generátornak a*

$$\xi_U(x) = [\gamma_{\xi,x}]_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\exp t\xi}(x)\bigg|_{t=0} \tag{7.15}$$

vektormezőt nevezzük.

7.8. Példa. *Legyen* F *az* X *teljes vektormező folyama, azaz* $\mathbb{R}$ *egy hatása. Ekkor az* $1 \in T_e\mathbb{R}$ *elemhez tartozó infinitezimális generátor* X*.*

7.9. Példa. *Legyen* $G \subseteq \mathrm{GL}(n)$*,* $U = \mathbb{R}^n$ *és tekintsük a* $\Phi_A(x) = Ax$ *hatást. Ha* $\xi \in T_eG$*, akkor*

$$\xi_U(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\exp t\xi}(x)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\xi)x\bigg|_{t=0} = \xi x. \tag{7.16}$$

7.3. Invariáns differenciálformák

7.10. Definíció (invariáns differenciálforma)**.** *Legyen G mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\Phi : G \times U \to U$ a G csoport egy sima hatása. Egy $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^* U)$ differenciálforma G-invariáns, ha minden $g \in G$ esetén $\Phi_g^* \alpha = \alpha$.*

7.11. Példa. *Legyen $X \in \Gamma(TU)$ teljes vektomező, $F : \mathbb{R} \times U \to U$ a folyama mint $\mathbb{R}$-hatás. Ekkor egy α differenciálforma pontosan akkor $\mathbb{R}$-invariáns (az F hatás szerint), ha az X vektormezőre invariáns (4.17 Definíció).*

7.12. Állítás. *Legyen G összefüggő mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\Phi : G \times U \to U$ sima hatása. Egy $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k T^* U)$ differenciálforma pontosan akkor G-invariáns, ha minden $\xi \in T_e G$ esetén $\mathcal{L}_{\xi_U} \alpha = 0$.*

Bizonyítás. Ha α G-invariáns és $\xi \in T_e G$, akkor speciálisan minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha = \Phi_{\exp t\xi}^* \alpha$ is teljesül. De $t \mapsto \Phi_{\exp t\xi}$ éppen a ξ_U vektormező folyama, tehát

$$\mathcal{L}_{\xi_U} \alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi_{\exp t\xi}^* \alpha \bigg|_{t=0} = 0. \tag{7.17}$$

Megfordítva, ha $\mathcal{L}_{\xi_U} \alpha = 0$ minden ξ_U esetén, akkor $\alpha = \Phi_{\exp t\xi}^* \alpha$ minden t és ξ esetén, tehát speciálisan minden $g \in \exp(T_e G)$ mellett $\Phi_g^* \alpha = \alpha$. Mivel G összefüggő, a 7.4 állítás (v) pontja alapján az ilyen g elemek generálják a csoportot. □

Ebből a karakterizációból (is) könnyen adódik a 4.18 Állítás megfelelője: G-invariáns differenciálformák szorzata, külső deriváltja is G-invariáns.

8. Hamilton-rendszerek szimmetriái, megmaradó mennyiségek

8.1. Szimplektikus hatások

8.1. Definíció (szimplektikus hatás)**.** *Legyen G mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma. A G csoport egy $\Phi : G \times U \to U$ sima hatása szimplektikus, ha minden $g \in G$ esetén $\Phi_g : U \to U$ szimplektikus leképezés.*

8.2. Állítás. *Legyen G összefüggő mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma. Ekkor egy $\Phi : G \times U \to U$ hatás pontosan akkor szimplektikus, ha minden $\xi \in T_e G$ esetén $\mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_U}\omega = 0$.*

Bizonyítás. A 7.12 Állítás alapján ω pontosan akkor G-invariáns, ha minden $\xi \in T_e G$ esetén $\mathcal{L}_{\xi_U}\omega = 0$. Mivel ω szimplektikus forma (tehát speciálisan zárt is),

$$\mathcal{L}_{\xi_U}\omega = \mathbf{i}_{\xi_U}\,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_U}\omega = \mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_U}\omega \tag{8.1}$$

□

8.3. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}$, $T^*Q \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kanonikus koordinátafüggvényei q, p, $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$ a kanonikus szimplektikus forma. Legyen $G = \mathbb{R}$ a valós számok additív csoportja, ekkor $T_e G \simeq \mathbb{R}$. Tekintsük a Q téren a $\Phi_t(q,p) = (q+t, p)$ hatást. Legyen $\xi = 1$, az infinitezimális generátor*

$$\begin{aligned}\xi_{T^*Q}(q,p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(q,p)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q+t,p)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial q}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Erre

$$\mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega = \mathrm{d}\,\mathrm{d}p = 0 \tag{8.3}$$

teljesül, tehát a hatás szimplektikus.

8.4. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}^2$, $T^*Q \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ kanonikus koordinátái q_1, q_2, p_1, p_2, amelyekkel a kanonikus szimplektikus forma $\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_2$. Legyen $G = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ a*

$$\Phi_t(q_1,q_2,p_1,p_2) = (q_1\cos t - q_2\sin t, q_1\sin t + q_2\cos t, p_1\cos t - p_2\sin t, p_1\sin t + p_2\cos t) \tag{8.4}$$

hatással. Ekkor $T_eG \simeq \mathbb{R}$, a $\xi = 1$ elemnek megfelelő infinitezimális generátor

$$\begin{aligned}\xi_{T^*Q}(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(q_1, q_2, p_1, p_2)\Big|_{t=0} \\ &= -q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega &= \mathrm{d}(-q_2\,\mathrm{d}p_1 + q_1\,\mathrm{d}p_2 + p_2\,\mathrm{d}q_1 - p_1\,\mathrm{d}q_2) \\ &= -\,\mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_2 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_1 - \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_2 = 0,\end{aligned} \tag{8.6}$$

tehát a hatás szimplektikus.

8.5. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}$, $T^*Q \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kanonikus koordinátafüggvényei q, p, $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$ a kanonikus szimplektikus forma. Tekintsük $G = \mathrm{SO}(2)$ következő hatását:*

$$\Phi_t(q, p) = (q\cos t - p\sin t, q\sin t + p\cos t). \tag{8.7}$$

Ekkor $T_eG \simeq \mathbb{R}$, a $\xi = 1$ elemnek megfelelő infinitezimális generátor

$$\begin{aligned}\xi_{T^*Q}(q, p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_t(q, p)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q\cos t - p\sin t, q\sin t + p\cos t)\Big|_{t=0} \\ &= -p\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{\partial}{\partial p}.\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega &= \mathrm{d}(-p\,\mathrm{d}p - q\,\mathrm{d}q) \\ &= -\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}p - \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}q = 0,\end{aligned} \tag{8.9}$$

tehát a hatás szimplektikus.

A 8.3 és a 8.4 Példákban az a közös, hogy a csoportnak a Q téren való hatását emeltük fel a koérintőnyalábra (az ilyeneket pont-transzformációknak nevezik). Ezt általában is meg lehet tenni és az így kapott hatás mindig szimplektikus lesz a kanonikus szimplektikus formára nézve [FoM, 3.2.12].

A 8.2 Állítás szerint egy hatás akkor szimplektikus (G egységkomponensén), ha $\mathbf{i}_{\xi_U}\omega$ zárt a Lie-algebra minden ξ eleme esetén. Ebből általában nem következik, hogy $\mathbf{i}_{\xi_U}\omega$ egzakt, de a gyakorlatban mégis gyakran teljesül (pl. ha U csillagszerű, lásd 4.13 Tétel). Ezzel az esettel érdemes külön is foglalkozni, elsősorban a lenti alapvető megmaradási tétel miatt (8.10 Tétel).

8.6. Definíció (Hamilton-hatás, momentum-leképezés)**.** *Legyen G összefüggő mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma. A G csoport egy $\Phi : G \times U \to U$ sima hatása Hamilton-féle, ha minden $\xi \in T_eG$ esetén az $\mathbf{i}_{\xi_U}\omega$ differenciálforma egzakt.*

Legyen G összefüggő mátrix Lie-csoport, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*U)$ szimplektikus forma, $\Phi : G \times U \to U$ a G csoport egy szimplektikus hatása. Egy $J : U \to T_e^*G$ leképezés a hatáshoz tartozó momentum-leképezés, ha minden $\xi \in T_eG$ esetén $\mathrm{d}\hat{J}(\xi) = \mathbf{i}_{\xi_U}\omega$ (azaz $X_{\hat{J}(\xi)} = \xi_U$), ahol $\hat{J}(\xi)(x) = J(x) \cdot \xi$.

Ha egy hatáshoz tartozik momentum-leképezés, akkor az a definíció alapján Hamilton-féle. Másrészt ha egy hatás Hamilton-féle, akkor létezik hozzá tartozó momentum-leképezés is. Legyen ugyanis T_eG egy bázisa $\xi_1, \dots, \xi_k$, és válasszunk $J_1, \dots, J_k$ sima függvényeket, amelyekre $(\xi_i)_U = X_{J_i}$ teljesül $(i = 1, \dots, k)$. Ekkor $\hat{J}(\xi_i) := J_i$ lineáris kiterjesztése momentum-leképezés.

8.7. Példa. *$\mathbb{R}$ egy Hamilton-hatása ugyanaz mint egy Hamilton-vektormező folyama, a momentum-leképezés a Hamilton-függvénnyel azonosítható.*

8.8. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}$, $T^*Q \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kanonikus koordinátafüggvényei q, p, $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$ a kanonikus szimplektikus forma. Legyen $G = \mathbb{R}$ a valós számok additív csoportja, ekkor $T_eG \simeq \mathbb{R}$. Tekintsük a Q téren a $\Phi_t(q, p) = (q + t, p)$ hatást. A 8.3 Példa szerint a hatás szimplektikus. Mivel T^*Q csillagszerű, a hatás egyúttal Hamilton-féle is. Valóban, ha $\xi = 1 \in \mathbb{R} \simeq T_eG$, akkor $\mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega = \mathrm{d}p$ egzakt, és ezt elegendő ellenőrizni, mivel T_eG egydimenziós. Egy momentum-leképezéshez úgy jutunk, ha a p sima függvényt megszorozzuk T_e^*G azon elemével, amely a ξ vektorhoz az 1 számot rendeli.*

8.9. Példa. *Tekintsük a 8.4 Példa hatását és az ott szereplő $\xi \in T_eG$ vektort. Mivel*

$$\mathrm{d}(q_1p_2 - q_2p_1) = p_2\,\mathrm{d}q_1 + q_1\,\mathrm{d}p_2 - p_1\,\mathrm{d}q_2 - q_2\,\mathrm{d}p_1 = \mathbf{i}_{\xi_{T^*Q}}\omega, \tag{8.10}$$

egy momentum-leképezés $q_1p_2 - q_2p_1$ és a $\xi \mapsto 1$ lineáris leképezés szorzata.

Általában is igaz, hogy ha adott G egy hatása a Q téren, akkor a T^*Q térre felemelt hatás Hamilton-féle [FoM, 4.2.11].

8.2. Hamilton-rendszererek szimmetriái

8.10. Tétel. *Legyen $\Phi : G \times U \to U$ a G szimplektikus hatása, J egy hozzá tartozó momentum-leképezés. Tegyük fel, hogy $H \in C^\infty(U)$ G-invariáns. Ekkor J X_H-invariáns.*

Bizonyítás. Legyen $\xi \in T_eG$. Mivel H G-invariáns, minden $x \in U$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $H(x) = H(\Phi_{\exp t\xi}(x))$. Deriváljuk az egyenlőséget t szerint a $t = 0$ pontban:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\Phi_{\exp t\xi}(x))\bigg|_{t=0} \\
&= \xi_U(H)(x) \\
&= \mathcal{L}_{X_{\hat{J}(\xi)}} H(x) \\
&= \{H, \hat{J}(\xi)\}.
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Ez a 6.20 Állítás szerint éppen azt jelenti, hogy $\hat{J}(\xi)$ mozgásállandó. □

8.11. Példa. *Legyen $Q = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $G = \mathrm{SO}(n)$ a standard hatásával: $\Phi_g(x) = gx$, ahol $x \in Q$ oszlopvektor. Tekintsük ennek felemeltjét a T^*Q téren, ehhez a hatáshoz egy momentum-leképezés $(q, p) \mapsto (\xi \mapsto p(\xi q))$. Ha a Hamilton-függvény $H(q, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(|q|)$ valamely $V \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ függvénnyel (centrálszimmetrikus potenciál), akkor H G-invariáns, tehát a tétel szerint a momentum-leképezés mozgásállandó. Ha például ξ az a mátrix, amelynek i, j eleme 1, j, i eleme -1, mindenhol máshol 0 áll, akkor $\hat{J}(\xi) = q_jp_i - q_ip_j$ az impulzusmomentum komponense.*

8.12. Példa. *Tekintsük az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ téren a 8.5 Példa szerinti $\mathrm{SO}(2)$-hatást ($\Phi_t(q, p) = (q\cos t - p\sin t, q\sin t + p\cos t)$), ehhez egy momentum-leképezés $-(\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2)$. A $H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$ (harmonikus oszcillátor) Hamilton-függvény G-invariáns, a mozgásállandó lényegében maga az energia.*

Egy Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező folyamára úgy is gondolhatunk mint a $\mathbb{R}$ csoport egy Hamilton-hatására. Ezt figyelembe véve megadható a 8.10 Tétel egy általánosítása, amelyben a kétféle hatás szimmetrikus szerepet tölt be.

8.13. Tétel. *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ részsokaság, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2T^*U)$ szimplektikus forma, G_1, G_2 két összefüggő mátrix Lie-csoport, amelyek adott egy-egy Hamilton-hatása J_1, J_2 momentum-leképezésekkel ($J_i : U \to T_e^*G_i$). Ekkor ha J_1 G_2-invariáns, akkor J_2 G_1-invariáns.*

9. Differenciálható sokaságok

Láttuk, hogy a vektorterek nyílt részhalmazain mellett részsokaságokon értelmezett függvényeknek is értelmes differenciálhatóságáról, deriváltjáról beszélni. A mechanika szempontjából ezt az általánosítást az motiválta, hogy kényszererők fellépésekor a tényleges konfigurációs tér a kényszerfeltételek által meghatározott részhalmaz, ami enyhe regularitási feltételek mellett részsokaság.

Ennek a szakasznak a célja egy további általánosítás, a differenciálható sokaságok fogalmának rövid bevezetése. Az általánosítás alapötlete az, hogy vektorterek nyílt részhalmazait ragasztjuk össze sima leképezések mentén, a differenciálhatósági kérdéseket pedig visszavezetjük az egyes darabokra vett megszorítások vizsgálatára. Ez lehetőséget ad arra, hogy absztraktabb halmazokon, például bizonyos hányadosokon (ekvivalenciaosztályok terén) értelmezzünk differenciálhatóságot. Érdemes megemlíteni, hogy minden differenciálható sokaság beágyazható valamely elegendően magas dimenziós vektortérbe részsokaságként. Az absztaktabb nézőpont azért kézenfekvő mégis, mert általában egy ilyen tér semmilyen kitüntetett módon nem tekinthető egy vektortér részsokaságának.

9.1. Definíció (topologikus tér, nyílt halmaz, folytonos leképezés, homeomorfizmus, altér, hányados, szorzat)**.** *Egy $(X, \mathcal{T}_X)$ pár topologikus tér, ha X halmaz, $\mathcal{T}_X \subseteq 2^X$ és az alábbiak teljesülnek:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ *és* $X \in \mathcal{T}_X$

(ii) ha $U, V \in \mathcal{T}_X$*, akkor* $U \cap V \in \mathcal{T}_X$

(iii) ha $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_X^I$ *tetszőleges rendszer, akkor* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

$\mathcal{T}_X$ *elemeit nyílt halmazoknak nevezzük. Egy* $A \subseteq X$ *részhalmaz zárt, ha* $X \setminus A$ *nyílt.*

Ha $(X, \mathcal{T}_X)$ *és* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topologikus terek, akkor egy* $f : X \to Y$ *leképezés folytonos, ha minden* $U \in \mathcal{T}_Y$ *esetén* $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ *teljesül. Egy* $f : X \to Y$ *leképezés homeomorfizmus, ha folytonos, bijektív, és az inverze is folytonos.*

Ha $(X, \mathcal{T}_X)$ *topologikus tér,* $A \subseteq X$ *részhalmaz, akkor* $\mathcal{T}_A := \{U \cap A | U \in \mathcal{T}_X\}$ *az altértopológia.*

Ha $(X, \mathcal{T}_X)$ *topologikus tér,* $\sim\subseteq X \times X$ *ekvivalenciareláció, akkor az* $X/\sim = \{[x] | x \in X\}$ *halmazon* $\mathcal{T}_{X/\sim} := \{U \subseteq X/\sim | \{x \in X | [x] \in U\} \in \mathcal{T}_X\}$ *a hányados-topológia.*

Az $(X, \mathcal{T}_X)$ *és* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topologikus terek szorzata az* $X \times Y$ *halmaz az* $\{U \times V | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$ *halmazok által generált topológiával.*

Ha nem okoz félreértést, akkor a topologikus terekre az alaphalmaz szimbólumával hivatkozunk.

9.2. Példa. *Legyen* $X = \mathbb{R}^n$*,* $\mathcal{T}_X$ *azon* Y *részhalmazok összessége, amelyekre minden* $y \in Y$ *esetén létezik* $\epsilon > 0$*, amire* $\{x \in X | |x - y| < \epsilon\} \subseteq Y$ *(euklideszi topológia).*

Általánosabban, ha (X,d) pszeudometrikus tér (azaz $d : X \times X \to \mathbb{R}_{>0}$, $\forall x,y,z \in X : d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$), akkor rajta azt a $\mathcal{T}_X$ topológiát tekintjük, ami azon Y részhalmazok összessége, amelyekre minden $y \in Y$ esetén létezik $\epsilon > 0$, amire $\{x \in X | d(x,y) < \epsilon\} \subseteq Y$.

Az n dimenziós gömb $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \big| |x| = 1\}$ az euklideszi topológiából származó altértopológiával.

9.3. Definíció (Hausdorff)**.** *Egy X topologikus tér Hausdorff, ha bármely $x,y \in X$, $x \neq y$ pontokhoz léteznek U,V nyílt halmazok, amelyekre $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ teljesül.*

Bármely Hausdorff topologikus tér altere és Hausdorff terek szorzata is Hausdorff, $\mathbb{R}^n$ az euklideszi topológiával szintén Hausdorff. Ugyanakkor egy Hausdorff-tér hányadosa nem minden esetben Hausdorff.

9.4. Állítás. *Legyen X Hausdorff topologikus tér, $\sim \subseteq X \times X$ ekvivalenciareláció. Ekkor $X/\sim$ pontosan akkor Hausdorff, ha $\sim$ zárt.*

9.5. Definíció (bázis, második megszámlálhatósági axioma)**.** *Legyen $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus tér. Egy $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$ részhalmaz bázis, ha minden $U \in \mathcal{T}_X$ nyílt halmaz előáll*

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{U} \\ V \subseteq U}} V \tag{9.1}$$

alakban. Egy topologikus tér teljesíti a második megszámlálhatósági axiomát (vagy megszámlálható bázisú), ha létezik megszámlálható bázisa.

Megszámlálható bázisú terek altere, véges vagy megszámlálható szorzata is megszámlálható bázisú. $\mathbb{R}^n$ az euklideszi topológiával teljesíti a második megszámlálhatósági axiomát. Ha X megszámlálható bázisú és $\sim$ olyan ekvivalenciareláció, hogy az $X \to X/\sim$ hányadosleképezés nyílt, akkor $X \to X/\sim$ is megszámlálható bázisú.

9.6. Definíció (lokális térkép, kompatibilitás, atlasz, ekvivalens atlaszok, maximális atlasz, sima sokaság)**.** *Legyen X topologikus tér. Egy (U, φ) pár lokális térkép, ha $U \subseteq X$ nyílt és $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ olyan leképezés ($n \in \mathbb{N}$), amelyre $\varphi(U)$ nyílt és φ homeomorfizmus U és $\varphi(U)$ között. Ha $x \in X$, akkor egy (U, φ) lokális térkép x-beli (vagy x körüli), ha $x \in U$. Az (U, φ) és (V, ψ) lokális térképek kompatibilisek, ha $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ diffeomorfizmus (C^∞). Térképek egy $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ halmaza atlasz, ha bármely két eleme kompatibilis és $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Két atlasz ekvivalens, ha az uniójuk is atlasz. Egy atlasz maximális, ha tartalmaz minden vele ekvivalens atlaszt.*

Egy $M = (X, \mathcal{A})$ pár sima sokaság, ha X Hausdorff topologikus tér és teljesíti a második megszámlálhatósági axiomát, $\mathcal{A}$ maximális atlasz.

Egy atlasz egyértelműen meghatározza azt a maximális atlaszt, ami azt tartalmazza: ez éppen a vele kompatibilis atlaszok egyesítése. Így egy sima sokaság megadásához elegendő egy atlaszt kijelölni.

9.7. Példa. *$\mathbb{R}^n$ minden M részsokasága sima sokasággá tehető a 7.3 Definícióban szereplő φ diffeomorfizmusok M-re való leszűkítései által meghatározott atlasszal.*

9.8. Példa. *Két sima sokaság szorzata is sima sokaság a lokális térképek $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ szorzatai által meghatározott maximális atlasszal.*

9.9. Példa. *Legyen $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, vagyis az euklideszi topológiával ellátott valós számok terének az $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$ ekvivalenciareláció szerinti hányadosa. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $U_a = \{[b] | |a - b| < 1/3\}$ és $\varphi_a : U \to \mathbb{R}$ az a leképezés, ami a $[b]$ pontot az $a - b + \mathbb{Z}$ halmaz legkisebb abszolút értékű elemébe viszi. Ekkor (U_a, φ_a) térkép és az összes ilyen térkép halmaza atlasz.*

9.10. Definíció. *Legyenek M, N sima sokaságok. Egy $f : M \to N$ leképezés sima, ha az M illetve N atlaszából választott minden (U, φ) illetve (V, ψ) térkép esetén $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$ sima leképezés.*

Egy M sokaságon x pontbeli lokális görbének nevezünk egy $(-\epsilon, \epsilon) \to M$ sima leképezést, amire $\gamma(0) = x$. A γ_1, γ_2 x-beli lokális görbék ekvivalensek, ha valamely (U, φ) x-beli lokális térképre a $\varphi \circ \gamma_1$ és $\varphi \circ \gamma_2$ ekvivalens (azaz a 0 helyen megegyezik a deriváltjuk). Az x-beli lokális görbék ekvivalenciaosztályainak halmaza a T_xM érintőtér, elemeit érintővektoroknak nevezzük.

Az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmazain definiált érintővektorokhoz hasonlóan T_xM is vektorteret alkot, duális tere a T_x^*M koérintőtér. Itt is igaz, hogy a vektorokra derivációként is gondolhatunk, ezúttal a $C^\infty(M)$ sima függvények terén, amelyet az előbbi definíció speciális eseteként térképekkel definiálunk. A korábban a vektormezőkkel és differenciálformákkal kapcsolatban bevezetett fogalmak, állítások továbbra is érvényben maradnak, mivel azokat görbék és derivációk segítségével definiáltuk (pl. folyam, Lie-derivált, zárt és egzakt differenciálformák, Riemann-metrika, stb.). Ugyanígy a részsokaság fogalma is értelmes marad: egy M sokaság egy $N \subseteq M$ részhalmaza részsokaság, ha egy atlasz minden térképe részsokaságba viszi.

9.11. Definíció (reguláris érték)**.** *Legyenek M, N sima sokaságok, $f : M \to N$ sima leképezés. Egy $n \in N$ pont az f reguláris értéke, ha minden $m \in f^{-1}(n)$ pont esetén $T_mf : T_mM \to T_nN$ szürjektív lineáris leképezés.*

Speciálisan ha $f^{-1}(n) = \emptyset$, akkor is reguláris értéknek nevezzük az n pontot.

9.12. Állítás. *Legyenek M, N sima sokaságok, $f : M \to N$ sima leképezés, $n \in N$ az f egy reguláris értéke. Ekkor $f^{-1}(n) \subseteq M$ részsokaság, dimenziója* $\dim M - \dim N$.

Sima sokaságon is beszélhetünk szimplektikus struktúráról:

9.13. Definíció. *Egy (M, ω) pár szimplektikus sokaság, ha M sima sokaság és $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ zárt és minden pontban nemelfajuló.*

Számunkra elsősorban olyan sima struktúrával ellátható hányadosterek lesznek fontosak, amelyeket egy sima csoporthatás indukál. Ha G mátrix Lie-csoport és M sima sokaság, akkor egy $\Phi : G \times M \to M$ sima leképezés hatás, ha $\Phi_e = \mathrm{id}_M$ és $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$ minden $g, h \in G$ esetén (lásd a 7.5 Definíció).

9.14. Definíció. *Legyen Φ a G mátrix Lie-csoport egy hatása az M sokaságon. Az $x \in M$ pont stabilizátora $G_x = \{g \in G | \Phi_g(x) = x\}$, orbitja a $G \cdot x = \{\Phi_g(x) | g \in G\}$ részhalmaz. Az orbittér $M/G = \{G \cdot x | x \in M\}$. A hatás szabad, ha minden $x \in M$ esetén a $g \mapsto \Phi_g(x)$ leképezés injektív.*

Φ proper hatás, ha a $(g, x) \mapsto (x, \Phi_g(x))$ leképezés proper (azaz kompakt részhalmaz őse kompakt).

A proper hatás másképp megfogalmazva azt jelenti, hogy ha x_n és $\Phi_{g_n}(x_n)$ konvergens valamely $x_n \in M$ és $g_n \in G$ sorozatokra, akkor a g_n sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. Például ha G kompakt, akkor ez automatikusan teljesül.

9.15. Állítás. *Ha a $\Phi : G \times M \to M$ sima hatás proper és $x \in M$, akkor a $G \cdot x$ orbit zárt részsokaság és $G/G_x \to G \cdot x \subseteq M$ diffeomorfizmus.*

9.16. Állítás. *Ha a $\Phi : G \times M \to M$ sima hatás proper és szabad, akkor M/G sima sokaság és $\pi : M \to M/G$ szubmerzió (vagyis az érintőleképezése minden pontban szürjektív). M/G dimenziója* $\dim M - \dim G$.

9.17. Példa. *Legyen $M = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, a hatás $\Phi_g(x) = x + g$. Ha az x_n és $x_n + g_n$ sorozatok konvergensek, akkor g_n maga is konvergens, tehát a hatás proper. $x = x + g$ csak $g = 0$ esetén igaz, tehát a hatás szabad. A hányados tehát sima sokaság, amint azt a 9.9 Példában is láttuk. Azt is meg lehet gondolni, hogy $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ diffeomorf az S^1 körvonallal.*

9.18. Példa. *Legyen $M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | |x| = 1\}$ részsokaság, $G = \{\pm 1\}$ a kételemű csoport és tekintsük annak $\Phi_g(x) = gx$ hatását. Mivel G kompakt, a hatás proper. Mivel $|x| = 1$ esetén $-x \neq x$, a hatás szabad. Az $S^n/\mathbb{Z}$ hányadostér az n dimenziós valós projektív tér, ami tehát az állítás szerint sima sokaság.*

9.19. Példa. *Legyen* $M = S^{2n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{2n+2} \| x| = 1\}$ *részsokaság,*

$$G = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \exp t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \tag{9.2}$$

a sík forgatásainak csoportja és tekintsük annak

$$\begin{aligned}&\Phi_t(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}, x_{2n+2}) \\ &= (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, \dots, x_{2n+1} \cos t - x_{2n+2} \sin t, x_{2n+1} \sin t + x_{2n+2} \cos t)\end{aligned} \tag{9.3}$$

hatását. Mivel G *kompakt, a hatás proper.* $x_{2i+1} \neq 0$ *vagy* $x_{2i+2} \neq 0$ *esetén az ezen két koordináta által meghatározott síkra vetítve* G *hatása forgatás, ami szabad, tehát az eredeti hatás is szabad (mivel* $|x| = 1$*, létezik ilyen* i*)..* *Az* $S^{2n+1}/\,\mathrm{SO}(2)$ *hányadostér az* n *dimenziós komplex projektív tér, ami tehát az állítás szerint sima sokaság.*

9.20. Megjegyzés. *A sima sokaság fogalmának birtokában lehetséges a mátrix Lie-csoportok helyett is általános Lie-csoportokat definiálni: ezek olyan sima sokaságok, amelyek egyúttal csoportok és a szorzás és inverz sima leképezések.*

10. Marsden–Weinstein-redukció

10.1. Koadjungált hatás

10.1. Állítás. *Legyen H, G mátrix Lie-csoport, $f : H \to G$ sima homomorfizmus. Ekkor $T_e f$ Lie-algebra homomorfizmus és minden $\eta \in T_e H$ esetén $f(\exp_H \eta) = \exp_G(T_e f(\eta))$*

Ha $g \in G$, akkor $L_g \circ R_g^{-1} : G \to G$ automorfizmus (L és R a csoport bal- és jobbeltolását jelenti, azaz $(L_g \circ R_g^{-1})(h) = ghg^{-1}$). Ennek az automorfizmusnak az egységelembeli deriváltja $T_e G$ automorfizmusa, amit G adjungált hatását definiálja.

10.2. Definíció. *A G mátrix Lie-csoport adjungált hatása az* $\mathrm{Ad} : G \times T_e G \to T_e G$,

$$\mathrm{Ad}_g(\xi) = g\xi g^{-1} \tag{10.1}$$

leképezés.

10.3. Következmény. *Ha $\xi \in T_e G$ és $g \in G$, akkor* $\exp(\mathrm{Ad}_g \xi) = g(\exp \xi) g^{-1}$

Az adjungált hatás által a csoport Lie-algebrájának duálisán indukált hatást koadjungált hatásnak nevezünk.

10.4. Definíció. *A G mátrix Lie-csoport koadjungált hatása a $\Phi : G \times T_e^* G \to T_e^* G$, $(g, \mu) \mapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\mu) = \mu \circ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ leképezés ($g \in G$, $\mu \in T_e^* G$).*

10.5. Definíció. *Legyen $\Phi : G \times U \to U$ és $\Psi : G \times V \to V$ egy csoport két hatása. Egy $f : U \to V$ leképezés ekvivariáns, ha minden $x \in U$ és $g \in G$ esetén $f(\Phi_g(x)) = \Psi_g(f(x))$ teljesül.*

10.2. Fázistér redukciója

10.6. Definíció (ekvivariáns momentum-leképezés)**.** *Legyen G Lie-csoport, (M, ω) szimplektikus sokaság, $\Phi : G \times M \to M$ szimplektikus hatás. Egy $J : M \to T_e^* G$ momentum-leképezés* Ad^**-ekvivariáns, ha minden $g \in G$ esetén $J \circ \Phi_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ J$.*

A következő tétel sok a gyakorlatban fontos esetben szolgáltat ekvivariáns momentum-leképezést.

10.7. Tétel. *Legyen $\omega = -\mathrm{d}\theta \in \Gamma(\Lambda^2 T^* M)$ egzakt szimplektikus forma, $\Phi : G \times M \to M$ szimplektikus hatás, és tegyük fel, hogy θ G-invariáns. Ekkor $J : M \to T_e^* G$, $J(x) \cdot \xi = (\mathbf{i}_{\xi_M} \theta)(x)$ egy* Ad^**-ekvivariáns momentum-leképezés.*

Bizonyítás. [FoM, 4.2.10] □

10.8. Példa. *Legyen* $M = T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$*, a kanonikus koordinátafüggvények* q, p*, a kanonikus* 1*-forma* $\theta = p\,\mathrm{d}q$*,* $\omega = -\,\mathrm{d}\theta$*. Tekintsük* $G = \mathbb{R}$ *következő hatását:* $\Phi_x(q,p) = (q + x, p)$*. Ekkor*

$$\Phi_x^*\theta = \Phi_x^* p\,\mathrm{d}(\Phi_x^* q) = p\,\mathrm{d}(q + x) = p\,\mathrm{d}q = \theta, \tag{10.2}$$

tehát θ G*-invariáns. A* $\xi \in T_eG \simeq \mathbb{R}$ *elemhez tartozó infinitezimális generátor* $\xi_M = \xi\frac{\partial}{\partial q}$*, tehát a momentum-leképezés*

$$\hat{J}(\xi) = \mathbf{i}_{\xi_M}\theta = \xi p, \tag{10.3}$$

ami valóban Ad^**-ekvivariáns, hiszen* G *kommutatív és így a koadjungált hatás triviális és* p G*-invariáns.*

10.9. Példa. *Legyen* $M = T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$*, a kanonikus koordinátafüggvények* $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$*, a kanonikus* 1*-forma* $\theta = \sum_{i=1}^n p_i\,\mathrm{d}q_i$*,* $\omega = -\,\mathrm{d}\theta$*. Tekintsük* $G = \mathrm{GL}(n)$ *következő hatását:* $\Phi_A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (A\mathbf{q}, (A^{-1})^T\mathbf{p})$*, ahol a rövidített* $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$*,* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *(vektor) jelölést alkalmaztuk. Legyenek* $A \in \mathrm{GL}(n)$ *mátrixelemei* a_{ij}*,* A^{-1} *mátrixelemei* b_{ij}*, ekkor*

$$\begin{aligned}
\Phi_A^*\theta &= \sum_{i=1}^n \Phi_A^* p_i\,\mathrm{d}(\Phi_A^* q_i) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n b_{ji} p_j\,\mathrm{d}(a_{ik} q_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n b_{ji} a_{ik} p_j\,\mathrm{d}q_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n \delta_{jk} p_j\,\mathrm{d}q_k \\
&= \sum_{j=1}^n p_j\,\mathrm{d}q_j = \theta,
\end{aligned} \tag{10.4}$$

tehát θ G*-invariáns. A* $\xi \in T_eG = \mathfrak{gl}(n)$ *mátrixhoz tartozó infinitezimális generátor*

$$\xi_M = \sum_{i,j=1}^n \left(\xi_{ij} q_j \frac{\partial}{\partial q_i} - \xi_{ji} p_j \frac{\partial}{\partial p_i}\right), \tag{10.5}$$

tehát az Ad^**-ekvivariáns momentum-leképezés*

$$\begin{aligned}
\hat{J}(\xi) &= \mathbf{i}_{\xi_M}\theta \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \xi_{ij} q_j p_k \delta_{ik} \quad = \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij} q_j p_i.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

10.10. Tétel. *Legyen (M,ω) szimplektikus sokaság, G Lie-csoport, $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés a G egy hatásához. Tegyük fel, hogy $\mu \in T_e^*G$ a J leképezésnek reguláris értéke és G_μ hatása a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon szabad és proper. Ekkor az $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ hányadoson létezik egy egyértelmű ω_μ szimplektikus forma, amelyre $\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$ teljesül, ahol $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to M_\mu$ a kanonikus projekció és $i_\mu : J^{-1}(\mu) \to M$ a részsokaság beágyazása.*

Bizonyítás. [FoM, 4.3.1] □

10.11. Példa (Fubini–Study szimplektikus forma)**.** *Legyen $M = \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ és tekintsük a komponensek valós illetve képzetes részeit mint koordinátafüggvényeket: $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ (tehát a komponenesek $x_0 + iy_0$, stb.). Legyen*

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i \tag{10.7}$$

a standard szimplektikus forma és tekintsük a

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0^n} x_i^2 + y_i^2 \tag{10.8}$$

Hamilton-függvény által meghatározott Hamilton-vektormező folyamát:

$$\Phi_t(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) = (x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \dots, x_n \cos t + y_n \sin t, -x_n \sin t + y_n \cos t). \tag{10.9}$$

Mivel $\Phi_{2\pi} = \Phi_0$, ez $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{SO}(2)$ egy Hamilton-hatásának is tekinthető, ami proper (mivel $\mathrm{SO}(2)$ kompakt) és szabad. $\mu = \frac{1}{2}$ reguláris érték, $H^{-1}(\frac{1}{2}) = S^{2n+1}$ és $G_\mu = G$ (mivel $\mathrm{SO}(2)$ kommutatív), tehát az $S^{2n+1}/\mathrm{SO}(2) = \mathbb{C}P^n$ komplex projektív tér a tétel szerint szimplektikus sokaság, az indukált $\omega_\mu =: \omega_{\mathrm{FS}}$ szimplektikus forma neve Fubini–Study-forma.

Legyen $[z] \in \mathbb{C}P^n$ és $v_1, v_2 \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n$. Ekkor léteznek $u_1, u_2 \in T_z\mathbb{C}^{n+1}$ vektorok, amelyekre $T\pi_\mu(u_1) = v_1$ és $T\pi_\mu(u_2) = v_2$. Ezekkel kifejezve

$$\omega_{\mathrm{FS}}(v_1, v_2) = 2\,\mathrm{Im}\,\frac{\langle u_1, u_2\rangle\langle u_1, z\rangle - \langle z, u_2\rangle\langle z, z\rangle}{\|z\|^4}. \tag{10.10}$$

10.3. Redukált Hamilton-függvény

10.12. Tétel. *Legyen (M,ω) szimplektikus sokaság, G Lie-csoport, $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés a G egy hatásához. Tegyük fel, hogy $\mu \in T_e^*G$ a J leképezésnek reguláris értéke és G_μ hatása a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon szabad és proper. Legyen továbbá $H \in C^\infty(M)$ G-invariáns*

Hamilton-függvény és legyen F az X_H vektormező folyama. Ekkor F_t önmagába képezi a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságot és ott kommutál G_μ hatásával, tehát indukál egy R_t folyamot az M_μ sokaságon, amire $\pi_\mu \circ F_t = R_t \circ \pi_\mu$ teljesül. Ez egy Hamilton-vektormező folyama, aminek egy H_μ Hamilton-függvényét $H_\mu \circ \pi_\mu = H \circ i_\mu$ egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás. Jelölje F_t az X_H folyamát a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságon, ekkor $\pi_\mu \circ F_t = R_t \circ \pi_\mu$ alapján

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* R_t^* \omega_\mu &= F_t^* \pi_\mu^* \omega_\mu \\ &= F_t^* i_\mu^* \omega \\ &= i_\mu^* \omega \\ &= \pi_\mu^* \omega_\mu, \end{aligned} \tag{10.11}$$

tehát $R_t^* \omega_\mu = \omega_\mu$ (mivel π_μ szubmerzió).

Mivel π_μ szürjektív, a $\pi_\mu^* H_\mu = i_\mu^* H$ feltétel egyértelműen meghatározza a H_μ függvényt. Ha $v \in TJ^{-1}(\mu)$ és Y jelöli R_t generátorát, akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H_\mu(T\pi_\mu(v)) &= i_\mu^* \,\mathrm{d}H(v) \\ &= i_\mu^* \omega(X_H, v) \\ &= \pi_\mu^* \omega_\mu(X_H, v) \\ &= \omega_\mu(Y, T\pi_\mu v), \end{aligned} \tag{10.12}$$

mivel $T\pi_\mu \circ X_H = Y \circ \pi_\mu$. □

10.13. Példa (Kéttest-probléma n dimenzióban)**.** *Legyen $d \in \mathbb{N}$, $Q = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $M = T^*Q \simeq \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ kanonikus koordinátái $q_{1,1}, \dots, q_{1,n}$, $q_{2,1}, \dots, q_{2,n}$, $p_{1,1}, \dots, p_{1,n}$, $p_{2,1}, \dots, p_{2,n}$, a szimplektikus forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^n (\mathrm{d}q_{1,i} \wedge \mathrm{d}p_{1,i} + \mathrm{d}q_{2,i} \wedge \mathrm{d}p_{2,i}). \tag{10.13}$$

Az egyszerűség kedvéért bevezetjük a $\mathbf{q}_1 = (q_{1,1}, \dots, q_{1,n})$, stb. rövid jelölést is. Tekintsük $G = \mathbb{R}^n$ következő hatását: $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{q}_1 + \mathbf{x}, \mathbf{q}_2 + \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Ekkor $T_eG \simeq \mathbb{R}^n$, a ξ vektorhoz tartozó infinitezimális generátor

$$\xi_M = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial q_{1,i}} + \frac{\partial}{\partial q_{2,i}} \right), \tag{10.14}$$

és $\hat{J}(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i (p_{1,i} + p_{2,i})$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés (vektoros jelöléssel ezt úgy is írhatjuk, hogy $J = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$). Ennek minden $\mu \in \mathbb{R}^n$ reguláris értéke. Tekintsük az $i_\mu^* \mathbf{q}_1, i_\mu^* \mathbf{q}_2$ és $i_\mu^* \mathbf{p}_1$ koordinátákat a $J^{-1}(\mu)$

részsokaságon. Ekkor $i_\mu^* \mathbf{p}_2 = \mu - i_\mu^* \mathbf{p}_1$, tehát

$$\begin{aligned} i_\mu^* \omega &= \sum_{i=1}^n \Big(\mathrm{d}(i_\mu^* q_{1,i}) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{1,i}) + \mathrm{d}(i_\mu^* q_{2,i}) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{2,i}) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\mathrm{d}(i_\mu^* q_{1,i}) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{1,i}) + \mathrm{d}(i_\mu^* q_{2,i}) \wedge \mathrm{d}(\mu - i_\mu^* p_{1,i}) \Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(i_\mu^*(q_{1,i} - q_{2,i})) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{1,i}) \end{aligned} \tag{10.15}$$

Mivel G kommutatív, a koadjungált hatás triviális, így $G_\mu = G$. G hatása szabad az egész M sokaságon, így a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságon is. Mivel a hatás a $\mathbf{q}_1$ és $\mathbf{q}_2$ együttes eltolása, a $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$ különbség állandó egy orbiton. Az $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ hányadostéren tekintsük azokat a $\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}$ koordinátákat, amire $\pi_\mu^* \mathbf{q} = i_\mu^*(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ és $\pi_\mu^* \mathbf{p} = i_\mu^* \mathbf{p}_1 - c\mu$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Ekkor

$$\omega_\mu = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i, \tag{10.16}$$

mivel

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* \omega_\mu &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(\pi_\mu^* q_i) \wedge \mathrm{d}(\pi_\mu^* p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(i_\mu^*(q_{1,i} - q_{2,i})) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{1,i} - c\mu_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(i_\mu^*(q_{1,i} - q_{2,i})) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^* p_{1,i}) = i_\mu^* \omega. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Legyen a Hamilton-függvény $H = \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{2m_2} + V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$ alakú, ahol $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ez G-invariáns, tehát meghatároz egy $H_\mu \in C^\infty(M_\mu)$ redukált Hamilton-függvényt az alábbi módon.

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* H_\mu &= i_\mu^* H \\ &= i_\mu^* \left(\frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{2m_2} + V(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \right) \\ &= \frac{1}{2m_1} \sum_{i=1}^n (i_\mu^* p_{1,i})^2 + \frac{1}{2m_2} \sum_{i=1}^n (i_\mu^* p_{2,i})^2 + V(i_\mu^*(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) \\ &= \frac{1}{2m_1} \sum_{i=1}^n (i_\mu^* p_{1,i})^2 + \frac{1}{2m_2} \sum_{i=1}^n (\mu - i_\mu^* p_{1,i})^2 + V(i_\mu^*(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)) \\ &= \frac{1}{2m_1} \sum_{i=1}^n (c\mu_i + \pi_\mu^* p_i)^2 + \frac{1}{2m_2} \sum_{i=1}^n ((1-c)\mu_i - \pi_\mu^* p_i)^2 + V(\pi_\mu^* \mathbf{q}), \end{aligned}$$

$$(10.18)$$

tehát

$$\begin{aligned}H_\mu &= \frac{1}{2m_1}\sum_{i=1}^n (c\mu_i + p_i)^2 + \frac{1}{2m_2}\sum_{i=1}^n ((1-c)\mu_i - p_i)^2 + V(\mathbf{q}) \\ &= \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)|\mathbf{p}|^2 + \left(\frac{c}{m_1} - \frac{1-c}{m_2}\right)(\mu\cdot\mathbf{p}) + \left(\frac{c^2}{2m_1} + \frac{(1-c)^2}{2m_2}\right)|\mu|^2 + V(\mathbf{q}).\end{aligned} \tag{10.19}$$

Vezessük be az $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ *redukált tömeget és válasszuk a* c *paraméter értékét* $c = \frac{m_1}{m_1+m_2}$. *Ekkor*

$$H_\mu = \frac{1}{2m}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2(m_1+m_2)}|\mu|^2 + V(\mathbf{q}). \tag{10.20}$$

Ez egy konstans tagtól eltekintve éppen a V *potenciálban mozgó* m *tömegű test Hamilton-függvénye.*

10.14. Példa (Mozgás a síkon centrális erőtérben)**.** *Legyen* $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $M = T^*Q \simeq Q \times \mathbb{R}^2$, *a kanonikus koordináták* $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ *és* $\omega = \mathrm{d}\bar{q}_1 \wedge \mathrm{d}\bar{p}_1 + \mathrm{d}\bar{q}_2 \wedge \mathrm{d}\bar{p}_2$ *a kanonikus szimplektikus forma. Tekintsük* $G = \mathrm{SO}(2)$ *szokásos hatását (8.4 Példa). Ekkor* $T_eG \simeq \mathbb{R}$, *a* $t \in \mathbb{R}$ *számot a*

$$\begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

mátrixszal azonosítjuk. Ekkor $J = \bar{q}_1\bar{p}_2 - \bar{q}_2\bar{p}_1$ Ad^**-ekvivariáns momentum-leképezés és ennek minden* $\mu \in \mathbb{R}$ *reguláris értéke.*

A $J^{-1}(\mu)$ *háromdimenziós részsokaság* $\bar{q}_1 \neq 0$ *feltétel által meghatározott nyílt és sűrű részhalmazán tekintsük a* $q_1 = i_\mu^*\bar{q}_1, q_2 = i_\mu^*\bar{q}_2, p_1 = i_\mu^*\bar{p}_1$ *koordinátákat. Itt*

$$p_2 = i_\mu^*\bar{p}_2 = \frac{\mu + q_2 p_1}{q_1} \tag{10.22}$$

teljesül, tehát

$$\begin{aligned} i_\mu^*\omega &= \mathrm{d}(i_\mu^*\bar{q}_1) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^*\bar{p}_1) + \mathrm{d}(i_\mu^*\bar{q}_2) \wedge \mathrm{d}(i_\mu^*\bar{p}_2) \\ &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\mu + q_2 p_1}{q_1}\right) \\ &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \left(-\frac{\mu + q_2 p_1}{q_1^2}\,\mathrm{d}q_1 + \frac{p_1}{q_1}\,\mathrm{d}q_2 + \frac{q_2}{q_1}\,\mathrm{d}p_1\right) \\ &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2}{q_1}\,\mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{\mu + q_2 p_1}{q_1^2}\,\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Mivel G kommutatív, a koadjungált hatás triviális, így $G_\mu = G$. G hatása szabad az egész M sokaságon, így a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságon is. Mivel a hatás a q és p síkvektorok forgatása, egy orbit mentén $|q|$ és $(q \cdot p)/|q|$ állandók. Válasszuk az ezek által meghatározott r, p_r koordinátákat az $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ hányadoson, azaz legyen

$$\pi_\mu^* r = |q| \pi_\mu^* p_r \quad = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{|q|} = \frac{q_1^2 p_1 + q_2^2 p_1 + \mu q_2}{q_1 |q|} = |q| \frac{p_1}{q_1} + \frac{\mu}{|q|} \frac{q_2}{q_1}. \tag{10.24}$$

Mivel $J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ kétdimenziós, létezik rajta egy egyértelmű f függvény, amivel $\omega_\mu = f \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}p_r$. Ezzel

$$\begin{aligned}
i_\mu^* \omega &= \pi_\mu^* \omega_\mu \\
&= \pi_\mu^* f \, \mathrm{d}(\pi_\mu^* r) \wedge \mathrm{d}(\pi_\mu^* p_r) \\
&= \pi_\mu^* f \, \mathrm{d}(|q|) \wedge \mathrm{d} \left(|q| \frac{p_1}{q_1} + \frac{\mu}{|q|} \frac{q_2}{q_1} \right) \\
&= \pi_\mu^* f \left(\frac{q_1}{|q|} \, \mathrm{d}q_1 + \frac{q_2}{|q|} \, \mathrm{d}q_2 \right) \\
&\qquad \wedge \left(- \frac{q_2 (q_2 p_1 + \mu) |q|^2 + q_1^2 q_2 \mu}{q_1^2 |q|^3} \, \mathrm{d}q_1 + \frac{|q|^2 q_2 p_1 + q_1^2 \mu}{q_1 |q|^3} \, \mathrm{d}q_2 + \frac{|q|}{q_1} \, \mathrm{d}p_1 \right) \\
&= \pi_\mu^* f \left(\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2}{q_1} \, \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2 p_1 + \mu}{q_1^2} \, \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2 \right) \\
&= \pi_\mu^* f i_\mu^* \omega,
\end{aligned} \tag{10.25}$$

amiből $f = 1$ következik, tehát $\omega_\mu = \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}p_r$.

Legyen a Hamilton-függvény $H = \frac{|p|^2}{2m} + V(|q|)$ alakú, ahol $V : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ez G-invariáns, tehát meghatároz egy $H_\mu : M_\mu \to \mathbb{R}$ redukált Hamilton-függvényt:

$$H_\mu = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r). \tag{10.26}$$

Ez szintén kinetikus és potenciális energia összege, ha bevezetjük a

$$V_\mu = \frac{\mu^2}{2m} \frac{1}{r^2} + V(r) \tag{10.27}$$

redukált potenciált.

10.15. Tétel. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $G, \overline{G}$ Lie-csoportok, $J : M \to T_e^* G$ és $\overline{J} : M \to T_e^* \overline{G}$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezések a G és $\overline{G}$ egy-egy hatásához. Tegyük fel, hogy $\mu \in T_e^* G$ a J leképezésnek reguláris értéke és G_μ hatása a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon szabad és proper. Ha G és $\overline{G}$ hatása kommutál és $\overline{J}$ G-invariáns, akkor* *(i)* J $\overline{G}$*-invariáns*

(ii) *a* $\overline{G}$*-hatás indukál egy egyértelmű szimplektikus hatást a* M_μ *redukált fázistéren és a hozzá tartozó* $\overline{J}_\mu : M_\mu \to T_e^*\overline{G}$ *momentum-leképezésre* $\overline{J}_\mu \circ \pi_\mu = \overline{J} \circ i_\mu$ *teljesül.*

10.16. Példa. *Legyen* G *Lie-csoport,* $\rho : G \to \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ *sima homomorfizmus (unitér reprezentáció). Tekintsük a* $\mathbb{C}^n$ *téren az* $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$ *standard szimplektikus formát, ahol* $z_i = x_i + iy_i$ *a komponensek algebrai alakja. A* $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$ *Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező folyama* $\mathrm{SO}(2)$ *egy proper szabad hatását határozza meg a* $H^{-1}(\frac{1}{2})$ *reguláris szintfelületen (10.11 Példa). A* G *csoport* $\Phi_g(\mathbf{z}) = \rho(g)\mathbf{z}$ *hatása kommutál ezzel az* $\mathrm{SO}(2)$*-hatással (komplex linearitás) és* H *a normanégyzettel arányos, tehát* H G*-invariáns. Eszerint* G *momentum-leképezése* H*-invariáns és indukálódik a* $H^{-1}(\frac{1}{2})/\,\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ *sokaságon egy Hamilton-féle* G*-hatás. A redukált momentum-leképezés a* $[\mathbf{z}] \in \mathbb{C}P^{n-1}$ *pontban*

$$\xi \mapsto \frac{1}{i}\frac{\langle \mathbf{z}, T_e\rho(\xi)\mathbf{z}\rangle}{\|\mathbf{z}\|^2}. \tag{10.28}$$

Hivatkozások

[FoM] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics.* Second Edition.

[Arnold] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.*