

Ez az útmutató a képletgyűjtemény táblázataihoz nyújt részletes magyarázatot. A képletgyűjteménynek nem célja, hogy az elméleti tudást helyettesítse, mindössze egy emlékeztető, ami segíti az előadások és gyakorlatok során megismert összefüggések egy részének felidézését. Ennek megfelelően – és a tömörség kedvéért – a formulák pontos értelmezését és az érvényesség feltételeit nem tünteti fel. Az eredményes használathoz nélkülözhetetlen ismeretek egy részét ez az útmutató foglalja össze.

Trigonometrikus függvények azonosságai

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x \sin y &= -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

A \sin és \cos függvények a teljes \mathbb{R} (vagy \mathbb{C}) halmazon értelmezettek, a felsorolt azonosságok minden x, y argumentumra érvényesek. A $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ függvény akkor értelmes, ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$. A tangensre vonatkozó addíciós képlet mindaddig érvényes, amíg minden szereplő argumentum (x, y és $x+y$ illetve $x-y$) benne van az értelmezési tartományban. Az e alapú exponenciális függvényt Taylor-sora segítségével terjesztjük ki komplex számokra, az utolsó két azonosság ezen kiterjesztéssel értendő.

Hiperbolikus függvények azonosságai

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{arsh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ \operatorname{arch} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ \operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\ \operatorname{arcth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}\end{aligned}$$

A sh és ch függvények a teljes \mathbb{R} (vagy \mathbb{C}) halmazon értelmezettek, a felsorolt azonosságok minden x, y argumentumra érvényesek.

Az inverz hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokat úgy kell érteni, hogy ha az egyik oldal értelmes, akkor a másik is, és az értékük megegyezik. \ln az e alapú exponenciális függvény mint valós függvény inverzét jelöli, értelmezési tartománya $(0, \infty)$. arsh értelmezési tartománya \mathbb{R} , arch értelmezési tartománya $[1, \infty)$, arth értelmezési tartománya $(-1, 1)$, arcth értelmezési tartománya $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Deriválási szabályok

$$\begin{aligned}(cf)' &= cf' \\ (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f \circ g)' &= (f' \circ g)g'\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, az egyenlőségek úgy értendők, hogy ha f és g differenciálható függvények, akkor cf , $f \pm g$, fg , f/g (amennyiben $g \neq 0$) és $f \circ g$ is differenciálhatóak, és a deriváltak között a jelzett összefüggések érvényesek. Az azonban előfordulhat, hogy f vagy g nem differenciálható, viszont a bal oldalon álló derivált mégis létezik.

Fontosabb függvények és deriváltjaik táblázata

$$\begin{aligned}
 (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
 (a^x)' &= (\ln a)a^x \\
 (\log_a x)' &= \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} \\
 (\sin x)' &= \cos x \\
 (\cos x)' &= -\sin x \\
 (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\
 (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x \\
 (\arcsin x)' &= -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arctan x)' &= -(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
 (\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x \\
 (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x \\
 (\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x \\
 (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x \\
 (\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 (\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
 (\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2} \\
 (\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}
 \end{aligned}$$

Ahol létezik a megadott függvény deriváltja, ott megegyezik a jobb oldalon álló kifejezéssel, de a jobb oldalon álló formulák értelmesek lehetnek bővebb halmazon is.

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, x^α értelmezett a $(0, \infty)$ intervallumon, ha α egész, akkor a $(-\infty, 0)$ intervallumon is, ha α pozitív egész, akkor az egész számegeyenesen, ha pozitív, akkor a 0 pontban is. A 0 pont kivételével az egész értelmezési tartományon differenciálható, ha $\alpha \geq 1$, akkor a 0 pontban is.

$a \geq 0$ tetszőleges, az a alapú exponenciális függvény az egész számegeyenesen értelmes és differenciálható is, inverze (\log_a) a $(0, \infty)$ intervallumon értelmes.

A \sin és \cos trigonometrikus függvények az egész számegeyenesen értelmezettek és differenciálhatóak is, tg értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$, ctg értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. $\arcsin x$ és \arccos értelmezési tartománya $[-1, 1]$, a $(-1, 1)$ intervallumon differenciálhatóak. \arctan és arccot az egész számegeyenesen értelmezett és differenciálható.

A sh és ch hiperbolikus függvények az egész számegeyenesen értelmezettek és differenciálhatóak is, th értelmezési tartománya \mathbb{R} , cth értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\operatorname{arsh} x$ értelmezési tartománya \mathbb{R} és mindenhol differenciálható, arch értelmezési tartománya az $[1, \infty)$ intervallum, az $(1, \infty)$ intervallumon differenciálható. arth értelmezési tartománya

$(-1, 1)$, arctanh értelmezési tartománya $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, mindkettő a teljes értelmezési tartományán differenciálható.

Integrálási szabályok

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f'(ax + b)dx = \frac{1}{a}f(ax + b) + C$$

$$\int f^\alpha(x)f'(x)dx = \begin{cases} \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \ln|f(x)| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ha f és g integrálhatóak, akkor cf és $f \pm g$ is és a primitív függvények között az első két egyenlet szerinti összefüggés érvényes.

A további egyenletekben f és g differenciálható. A negyedik egyenletben $\alpha \in \mathbb{Z}$ vagy $f > 0$.

Speciális helyettesítések

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$u = \operatorname{th} \frac{x}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{1-u^2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Ezen helyettesítésekkel $R(\cos x, \sin x)$ illetve $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ alakú függvények határozatlan integrálját lehet visszavezetni racionális törtfüggvény határozatlan integráljára, ha R racionális törtfüggvény, azaz (kétváltozós) polinomok hányadosa.

Maclaurin-sorok

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
 \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\
 \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \dots
 \end{aligned}$$

Az \exp , \cos , \sin , ch és sh függvények az egész \mathbb{R} (\mathbb{C}) halmazon analitikusak, tehát bármely pontbeli Taylor-soruk mindenhol konvergens és előállítja a függvényt.

Az $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ mértani sor konvergenciatartománya $(-1, 1)$, ott összege $(1-x)^{-1}$. Az $1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots$ binomiális sor a $(-1, 1)$ intervallumon bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett konvergens, ha α nemnegatív egész, akkor csak véges sok tag különbözik nullától, tehát mindenhol konvergens. Az összegfüggvény a konvergenciatartományon $(1+x)^\alpha$, kivéve az $\alpha = 0$, $x = -1$ értéket, ahol ez a formula nem értelmes, de a sor konvergens, összege 1.

Egyéb összefüggések

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

Az $(1+x)^n \geq 1 + nx$ Bernoulli-egyenlőtlenség minden $x > -1$ és $n \in \mathbb{N}$ számra igaz. A kifejtési tételben A $n \times n$ méretű mátrix, a_{ij} az i . sor j . eleme, A_{ij} az i . sor és j . oszlop elhagyása után megmaradó részmatrix. A binomiális együttható ezen kiterjesztése minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és nemnegatív egész n mellett értelmes. A harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepek mindegyike értelmezett n tetszőleges pozitív a_1, a_2, \dots, a_n számra ($n \geq 1$ egész), és közöttük a jelzett egyenlőtlenségek állnak fenn. Az egyenlőség feltétele $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Vektoranalízis

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \text{div } \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \text{rot } \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad D\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Legyen E háromdimenziós irányított euklideszi tér, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathbf{u} : E \rightarrow E$ differenciálhatóak (ekkor az előbbinek létezik gradiense, az utóbbinak divergenciája, rotációja és deriváltleképezése). Válasszunk $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként ortogonális, egységnyi hosszú és ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó vektorokat (ez szükségképpen bázis). Ekkor bármely skalármező megadható egy háromváltozós függvénnyel, amihez az $(x, y, z) \mapsto x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ leképezéssel való kompozícióval jutunk. Hasonlóan egy vektormező megadható komponensfüggvényei segítségével $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ módon. Ezen azonosítások mellett a táblázat formulái azt mutatják meg, hogy a gradiens ($E \rightarrow E$), divergencia ($E \rightarrow \mathbb{R}$), rotáció ($E \rightarrow E$) és deriváltleképezés ($E \rightarrow \text{Hom}(E, E)$) hogyan számítható ki a szereplő (komponens-)függvények parciális deriváltjai segítségével. A deriváltleképezés mátrix alakja az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban kifejtve értendő, a vektorok komponenseit oszlopmátrixba rendezve. A jelölés tömörsége kedvéért az argumentumok (mindenhol x, y, z) nincsenek feltüntetve.

Fourier-sorok

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right) \\ a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} dx \end{aligned}$$

Ha az f függvény T szerint periodikus és a $[0, T]$ intervallumon integrálható, akkor az a_0, a_n, b_n ($n \geq 1$ egész) együtthatókat a megadott integrálokkal számíthatjuk ki. Az integrálási tartomány az integrandus periodikussága miatt tetszőlegesen eltolható. Az együtthatókból a fenti módon képzett trigonometrikus sor f Fourier-sora.

Laplace-transzformáció és konvolúció, néhány gyakran előforduló függvény Laplace-transzformáltja

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-zx} dx$$

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(s)g(x-s) ds$$

$h(x)$	$(\mathcal{L}h)(z)$
1	$\frac{1}{z}$
x^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z - \alpha}$
$\cos bx$	$\frac{z}{z^2 + b^2}$
$\sin bx$	$\frac{b}{z^2 + b^2}$
$\operatorname{ch} bx$	$\frac{z}{z^2 - b^2}$
$\operatorname{sh} bx$	$\frac{b}{z^2 - b^2}$

Legyen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény. f Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}f : D \rightarrow \mathbb{C}$ a táblázatban látható integrállal adott függvény, $D \subseteq \mathbb{C}$ azon komplex számok halmaza, amire az integrál konvergens.

A konvolúció ezen definíciója $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre értendő, amennyiben az integrál létezik.

$\alpha, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azon $z \in \mathbb{C}$ pontokban, ahol a bal oldalon látható függvény Laplace-transzformáltja létezik, ott megegyezik a jobb oldalon álló kifejezéssel, de a jobb oldali kifejezés bővebb halmazon értelmes.

Integrálás

$$\begin{aligned}
 \int_C f ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt \\
 \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\
 \iint_S f dA &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \\
 \iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \\
 \iiint_V f dV &= \iiint_D f(\mathbf{r}(u, v, w)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| du dv dw \\
 \int_C \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} &= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \\
 \iint_S \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \\
 \iiint_V \text{div } \mathbf{u} dV &= \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \\
 \iint_{\partial V} f \text{ grad } g \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V (f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dV \\
 \iiint_V (f \Delta g - g \Delta f) dV &= \iint_{\partial V} (f \text{ grad } g - g \text{ grad } f) \cdot d\mathbf{A}
 \end{aligned}$$

A szereplő alakzatok minden esetben egy E háromdimenziós irányított euklideszi tér részhalmazai.

C irányított görbe, az első kettő és a hatodik egyenletben $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow E$ a görbe egy differenciálható paraméterezése. S irányított felületdarab, a harmadik és negyedik egyenletekben $\mathbf{r} : D \rightarrow E$ ennek egy differenciálható paraméterezése, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos nyílt. V a tér egy darabja, az ötödik egyenletben $\mathbf{r} : D \rightarrow E$ ennek egy differenciálható paraméterezése, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt. f folytonos skalármező, \mathbf{u} folytonos vektormező, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza az alakzatot. Skalármező integrálja irányítás nélkül is értelmes. Az integrálátalakító tételekben és a Green-tételekben ∂ az alakzat peremét jelenti az indukált irányítással (az S irányított felületdarab pereme a jobbkéz-szabály szerint, a tér V korlátos tartományának peremén kifelé mutat), f folytonosan differenciálható skalármező, \mathbf{u} folytonosan differenciálható vektormező. A Green-tételekben f és g kétszer folytonosan differenciálható.

Vektoranalízis azonosságok

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= 0 \\ \operatorname{grad} cf &= c \operatorname{grad} f \\ \operatorname{div} c\mathbf{u} &= c \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \operatorname{rot} c\mathbf{u} &= c \operatorname{rot} \mathbf{u} \\ \operatorname{grad}(f \pm g) &= \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) &= \operatorname{div} \mathbf{u} \pm \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) &= \operatorname{rot} \mathbf{u} \pm \operatorname{rot} \mathbf{v} \\ \operatorname{grad}(fg) &= (\operatorname{grad} f)g + f \operatorname{grad} g \\ \operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \operatorname{rot}(f\mathbf{u}) &= (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot} \mathbf{u} \\ \operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= D\mathbf{u}(\mathbf{v}) + D\mathbf{v}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= D\mathbf{u}(\mathbf{v}) - D\mathbf{v}(\mathbf{u}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - (\operatorname{div} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{v})\end{aligned}$$

Az első két azonosság kétszer folytonosan differenciálható f skalármezőre és \mathbf{u} vektormezőre vonatkozik.

A továbbiaknál $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha f, g differenciálható skalármezők, \mathbf{u}, \mathbf{v} differenciálható vektormezők, akkor a bal oldalon álló deriváltak is léteznek és értékük megegyezik a jobb oldallal. Az egyváltozós deriválási szabályokhoz hasonlóan itt is előfordulhat, hogy a jobb oldal nem értelmezett, de a bal oldal igen.

Laplace-transzformáció tulajdonságai

$$\begin{array}{ll} h(x) & (\mathcal{L}h)(z) \\ x^n f(x) & (-1)^n (\mathcal{L}f)^{(n)}(z) \\ e^{\alpha x} f(x) & (\mathcal{L}f)(z - \alpha) \\ f^{(n)}(x) & z^n (\mathcal{L}f)(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ (f * g)(x) & (\mathcal{L}f)(z)(\mathcal{L}g)(z) \end{array}$$

$n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A bal oldalon álló függvények Laplace-transzformáltjainak értelmezési tartománya nem mindig azonos a jobb oldalon álló (z -től függő) kifejezés értelmezési tartományával, de ahol mindkettő értelmes, ott az értékük megegyezik.

Egyváltozós multiplikátor

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

$$\ln |M(x)| = \int \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} dx$$

$$\ln |M(y)| = \int \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)} dy$$

A $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenlet független változója x , az ismeretlen függvény y , ennek és deriváltjának argumentumát (x) a szokásos módon nem tünteti fel a jelölés.

A P és Q kétváltozós függvényekről feltesszük, hogy folytonosan differenciálhatóak.

Ha a képletben szereplő integrandus csak az x illetve y változótól függ, akkor létezik csak x -től illetve csak y -től függő multiplikátor ($M(x)$ illetve $M(y)$), amit a megadott integrálokkal lehet meghatározni. Ekkor az $M(x)P(x,y) + M(x)Q(x,y)y' = 0$ illetve az $M(y)P(x,y) + M(y)Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenlet egzakt.