Ez az útmutató a képletgyűjtemény táblázataihoz nyújt részletes magyarázatot. A képletgyűjteménynek nem célja, hogy az elméleti tudást helyettesítse, mindössze egy emlékeztető, ami segíti az előadások és gyakorlatok során megismert összefüggések egy részének felidézését. Ennek megfelelően – és a tömörség kedvéért – a formulák pontos értelmezését és az érvényesség feltételeit nem tünteti fel. Az eredményes használathoz nélkülözhetetlen ismeretek egy részét ez az útmutató foglalja össze.

Trigonometrikus függvények azonosságai

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\
\cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\sin x \sin y &= -\frac{1}{2} \left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right] \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2} \left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right] \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2} \left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

A sin és cos függvények a teljes $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) halmazon értelmezettek, a felsorolt azonosságok minden x, y argumentumra érvényesek. A $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ függvény akkor értelmes, ha $\cos x \neq 0$, azaz $x \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$. A tangensre vonatkozó addíciós képlet mindaddig érvényes, amíg minden szereplő argumentum (x, y és $x + y$ illetve $x - y$) benne van az értelmezési tartományban. Az e alapú exponenciális függvényt Taylor-sora segítségével terjesztjük ki komplex számokra, az utolsó két azonosság ezen kiterjesztéssel értendő.

Hiperbolikus függvények azonosságai

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 \\
\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
\operatorname{arsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
\operatorname{arch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
\operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\
\operatorname{arcth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}
\end{aligned}$$

A sh és ch függvények a teljes $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) halmazon értelmezettek, a felsorolt azonosságok minden x, y argumentumra érvényesek.
Az inverz hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságokat úgy kell érteni, hogy ha az egyik oldal értelmes, akkor a másik is, és az értékük megegyezik. ln az e alapú exponenciális függvény mint valós függvény inverzét jelöli, értelmezési tartománya $(0, \infty)$. arsh értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, arch értelmezési tartománya $[1, \infty)$, arth értelmezési tartománya $(-1, 1)$, arcth értelmezési tartománya $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Deriválási szabályok

$$\begin{aligned}
(cf)' &= cf' \\
(f \pm g)' &= f' \pm g' \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
(f \circ g)' &= (f' \circ g)g'
\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, az egyenlőségek úgy értendők, hogy ha f és g differenciálható függvények, akkor cf, $f \pm g$, fg, f/g (amennyiben $g \neq 0$) és $f \circ g$ is differenciálhatóak, és a deriváltak között a jelzett összefüggések érvényesek. Az azonban előfordulhat, hogy f vagy g nem differenciálható, viszont a bal oldalon álló derivált mégis létezik.

Fontosabb függvények és deriváltjaik táblázata

$$
\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
(a^x)' &= (\ln a)a^x \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x \\
(\arcsin x)' &= -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\operatorname{arctg} x)' &= -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x \\
(\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x \\
(\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x \\
(\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{cth}^2 x \\
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
(\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2} \\
(\operatorname{arcth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

Ahol létezik a megadott függvény deriváltja, ott megegyezik a jobb oldalon álló kifejezéssel, de a jobb oldalon álló formulák értelmesek lehetnek bővebb halmazon is.
$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, x^α értelmezett a $(0, \infty)$ intervallumon, ha α egész, akkor a $(-\infty, 0)$ intervallumon is, ha α pozitív egész, akkor az egész számegyenesen, ha pozitív, akkor a 0 pontban is. A 0 pont kivételével az egész értelmezési tartományon differenciálható, ha $\alpha \geq 1$, akkor a 0 pontban is.
$a \geq 0$ tetszőleges, az a alapú exponenciális függvény az egész számegyenesen értelmes és differenciálható is, inverze ($\log_a$) a $(0, \infty)$ intervallumon értelmes.
A sin és cos trigonometrikus függvények az egész számegyenesen értelmezettek és differenciálhatóak is, tg értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$, ctg értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. $\arcsin x$ és arccos értelmezési tartománya $[-1, 1]$, a $(-1, 1)$ intervallumon differenciálhatóak. arctg és arcctg az egész számegyenesen értelmezett és differenciálható.
A sh és ch hiperbolikus függvények az egész számegyenesen értelmezettek és differenciálhatóak is, th értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, cth értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\operatorname{arsh} x$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$ és mindenhol differenciálható, arch értelmezési tartománya az $[1, \infty)$ intervallum, az $(1, \infty)$ intervallumon differenciálható. arth értelmezési tartománya

$(-1,1)$, arcth értelmezési tartománya $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, mindkettő a teljes értelmezési tartományán differenciálható.

Integrálási szabályok

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$
$$\int f'(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}f(ax+b)+C$$
$$\int f^\alpha(x)f'(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C & (\alpha\neq -1) \\ \ln|f(x)|+C & (\alpha=-1)\end{cases}$$
$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$a,b,c,\alpha\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Ha f és g integrálhatóak, akkor cf és $f\pm g$ is és a primitív függvények között az első két egyenlet szerinti összefüggés érvényes.
A további egyenletekben f és g differenciálható. A negyedik egyenletben $\alpha\in\mathbb{Z}$ vagy $f>0$.

Speciális helyettesítések

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$u = \operatorname{th}\frac{x}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{2u}{1-u^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{1-u^2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Ezen helyettesítésekkel $R(\cos x,\sin x)$ illetve $R(\operatorname{ch} x,\operatorname{sh} x)$ alakú függvények határozatlan integrálját lehet visszavezetni racionális törtfüggvény határozatlan integráljára, ha R racionális törtfüggvény, azaz (kétváltozós) polinomok hányadosa.

Maclaurin-sorok

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots
\end{aligned}$$

Az exp, cos, sin, ch és sh függvények az egész $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) halmazon analitikusak, tehát bármely pontbeli Taylor-soruk mindenhol konvergens és előállítja a függvényt.
Az $1+x+x^2+x^3+\cdots$ mértani sor konvergenciatartománya $(-1,1)$, ott összege $(1-x)^{-1}$.
Az $1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots$ binomiális sor a $(-1,1)$ intervallumon bármely $\alpha\in\mathbb{R}$ mellett konvergens, ha α nemnegatív egész, akkor csak véges sok tag különbözik nullától, tehát mindenhol konvergens. Az összegfüggvény a konvergenciatartományon $(1+x)^\alpha$, kivéve az $\alpha=0$, $x=-1$ értéket, ahol ez a formula nem értelmes, de a sor konvergens, összege 1.

Egyéb összefüggések

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad\qquad \det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

Az $(1+x)^n\ge 1+nx$ Bernoulli-egyenlőtlenség minden $x>-1$ és $n\in\mathbb{N}$ számra igaz. A kifejtési tételben A $n\times n$ méretű mátrix, a_{ij} az i. sor j. eleme, A_{ij} az i. sor és j. oszlop elhagyása után megmaradó részmátrix. A binomiális együttható ezen kiterjesztése minden $\alpha\in\mathbb{R}$ és nemnegatív egész n mellett értelmes. A harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepek mindegyike értelmezett n tetszőleges pozitív $a_1,a_2,\ldots,a_n$ számra ($n\ge 1$ egész), és közöttük a jelzett egyenlőtlenségek állnak fenn. Az egyenlőség feltétele $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Vektoranalízis

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \qquad D\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Legyen E háromdimenziós irányított euklideszi tér, $f : E \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{u} : E \to E$ differenciálhatóak (ekkor az előbbinek létezik gradiense, az utóbbinak divergenciája, rotációja és deriváltleképezése). Válasszunk $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként ortogonális, egységnyi hosszú és ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó vektorokat (ez szükségképpen bázis). Ekkor bármely skalármező megadható egy háromváltozós függvénnyel, amihez az $(x, y, z) \mapsto x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ leképezéssel való kompozícióval jutunk. Hasonlóan egy vektormező megadható komponensfüggvényei segítségével $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ módon. Ezen azonosítások mellett a táblázat formulái azt mutatják meg, hogy a gradiens ($E \to E$), divergencia ($E \to \mathbb{R}$), rotáció ($E \to E$) és deriváltleképezés ($E \to \operatorname{Hom}(E, E)$) hogyan számítható ki a szereplő (komponens-)függvények parciális deriváltjai segítségével. A deriváltleképezés mátrix alakja az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban kifejtve értendő, a vektorok komponenseit oszlopmátrixba rendezve. A jelölés tömörsége kedvéért az argumentumok (mindenhol x, y, z) nincsenek feltüntetve.

Fourier-sorok

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi n x}{T}\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}\mathrm{d}x$$

Ha az f függvény T szerint periodikus és a $[0, T]$ intervallumon integrálható, akkor az a_0, a_n, b_n ($n \geq 1$ egész) együtthatókat a megadott integrálokkal számíthatjuk ki. Az integrálási tartomány az integrandus periodikussága miatt tetszőlegesen eltolható. Az együtthatókból a fenti módon képzett trigonometrikus sor f Fourier-sora.

Laplace-transzformáció és konvolúció, néhány gyakran előforduló függvény Laplace-transzformáltja

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\mathrm{d}x$$

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(s)g(x-s)\mathrm{d}s$$

$h(x)$	$(\mathcal{L}h)(z)$
1	$\frac{1}{z}$
x^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z-\alpha}$
$\cos bx$	$\frac{z}{z^2+b^2}$
$\sin bx$	$\frac{b}{z^2+b^2}$
$\mathrm{ch}\, bx$	$\frac{z}{z^2-b^2}$
$\mathrm{sh}\, bx$	$\frac{b}{z^2-b^2}$

Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény. f Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}f : D \to \mathbb{C}$ a táblázatban látható integrállal adott függvény, $D \subseteq \mathbb{C}$ azon komplex számok halmaza, amire az integrál konvergens.
A konvolúció ezen definíciója $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényekre értendő, amennyiben az integrál létezik.
$\alpha, b \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azon $z \in \mathbb{C}$ pontokban, ahol a bal oldalon látható függvény Laplace-transzformáltja létezik, ott megegyezik a jobb oldalon álló kifejezéssel, de a jobb oldali kifejezés bővebb halmazon értelmes.

Integrálás

$$\int_C f \mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)|\mathrm{d}t$$
$$\int_C \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{u}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\mathrm{d}t$$
$$\iint_S f \mathrm{d}A = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$\iiint_V f \mathrm{d}V = \iiint_D f(\mathbf{r}(u,v,w)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$
$$\int_C \operatorname{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$
$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$
$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$
$$\iint_{\partial V} f \operatorname{grad} g \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \iiint_V (f \triangle g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g)\mathrm{d}V$$
$$\iiint_V (f \triangle g - g \triangle f)\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

A szereplő alakzatok minden esetben egy E háromdimenziós irányított euklideszi tér részhalmazai.
C irányított görbe, az első kettő és a hatodik egyenletben $\mathbf{r} : [a,b] \to E$ a görbe egy differenciálható paraméterezése. S irányított felületdarab, a harmadik és negyedik egyenletekben $\mathbf{r} : D \to E$ ennek egy differenciálható paraméterezése, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos nyílt. V a tér egy darabja, az ötödik egyenletben $\mathbf{r} : D \to E$ ennek egy differenciálható paraméterezése, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt. f folytonos skalármező, $\mathbf{u}$ folytonos vektormező, amelynek értelmezési tartománya tartalmazza az alakzatot. Skalármező integrálja irányítás nélkül is értelmes.
Az integrálátalakító tételekben és a Green-tételekben ∂ az alakzat peremét jelenti az indukált irányítással (az S irányított felületdarab pereme a jobbkéz-szabály szerint, a tér V korlátos tartományának peremén kifelé mutat), f folytonosan differenciálható skalármező, $\mathbf{u}$ folytonosan differenciálható vektormező. A Green-tételekben f és g kétszer folytonosan differenciálható.

Vektoranalízis azonosságok

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= 0\\
\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{u} &= 0\\
\operatorname{grad} cf &= c\operatorname{grad} f\\
\operatorname{div} c\mathbf{u} &= c\operatorname{div}\mathbf{u}\\
\operatorname{rot} c\mathbf{u} &= c\operatorname{rot}\mathbf{u}\\
\operatorname{grad}(f \pm g) &= \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g\\
\operatorname{div}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) &= \operatorname{div}\mathbf{u} \pm \operatorname{div}\mathbf{v}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) &= \operatorname{rot}\mathbf{u} \pm \operatorname{rot}\mathbf{v}\\
\operatorname{grad}(fg) &= (\operatorname{grad} f)g + f\operatorname{grad} g\\
\operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{u} + f\operatorname{div}\mathbf{u}\\
\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) &= (\operatorname{grad} f)\times\mathbf{u} + f\operatorname{rot}\mathbf{u}\\
\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= D\mathbf{u}(\mathbf{v}) + D\mathbf{v}(\mathbf{u}) + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}\\
\operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= D\mathbf{u}(\mathbf{v}) - D\mathbf{v}(\mathbf{u}) + (\operatorname{div}\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}\\
\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\operatorname{rot}\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Az első két azonosság kétszer folytonosan differenciálható f skalármezőre és $\mathbf{u}$ vektormezőre vonatkozik.
A továbbiaknál $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha f, g differenciálható skalármezők, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ differenciálható vektormezők, akkor a bal oldalon álló deriváltak is léteznek és értékük megegyezik a jobb oldallal. Az egyváltozós deriválási szabályokhoz hasonlóan itt is előfordulhat, hogy a jobb oldal nem értelmezett, de a bal oldal igen.

Laplace-transzformáció tulajdonságai

$h(x)$	$(\mathcal{L}h)(z)$
$x^n f(x)$	$(-1)^n(\mathcal{L}f)^{(n)}(z)$
$e^{\alpha x} f(x)$	$(\mathcal{L}f)(z-\alpha)$
$f^{(n)}(x)$	$z^n(\mathcal{L}f)(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$(f * g)(x)$	$(\mathcal{L}f)(z)(\mathcal{L}g)(z)$

$n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A bal oldalon álló függvények Laplace-transzformáltjainak értelmezési tartománya nem mindig azonos a jobb oldalon álló (z-től függő) kifejezés értelmezési tartományával, de ahol mindkettő értelmes, ott az értékük megegyezik.

Egyváltozós multiplikátor

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

$$\ln|M(x)| = \int \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} \mathrm{d}x$$

$$\ln|M(y)| = \int \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)} \mathrm{d}y$$

A $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenlet független változója x, az ismeretlen függvény y, ennek és deriváltjának argumentumát (x) a szokásos módon nem tünteti fel a jelölés. A P és Q kétváltozós függvényekről feltesszük, hogy folytonosan differenciálhatóak.
Ha a képletben szereplő integrandus csak az x illetve y változótól függ, akkor létezik csak x-től illetve csak y-tól függő multiplikátor ($M(x)$ illetve $M(y)$), amit a megadott integrálokkal lehet meghatározni. Ekkor az $M(x)P(x,y) + M(x)Q(x,y)y' = 0$ illetve az $M(y)P(x,y) + M(y)Q(x,y)y' = 0$ differenciálegyenlet egzakt.